Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.- Gyml. D. Dossing

5. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 18.11.2004, vor der Übung)

Hausaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) $a_n = \frac{5n}{1-2n}$
b) $a_n = \frac{2n^2+3n}{5n^3-1}$
c) $a_n = \frac{7n-4n^2+3}{7n+5}$
d) $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$a_n = \sqrt{n^2+1} - n$
Hinweis: Benutzen Sie die dritte binomische Formel!

Aufgabe 3: Ein Stück radioaktives Polonium habe zu Beginn eines Versuches eine Masse von x_0. Jährlich verliert es 3,7% seiner Masse durch radioaktiven Zerfall.
a) Geben Sie für den Prozess des radioaktiven Zerfalls eine Rekursionsgleichung an, die die Bestimmung der Masse nach $t = 1, 2, 3, ...$ Jahren erlaubt.
b) Bestimmen Sie die Gesamtmenge des Zerfallsproduktes nach N Jahren.

Aufgabe 4: In einen Bioreaktor fließen pro Stunde 10 g einer Substanz zu. Die Mikroben im Reaktor bauen pro Stunde 30 Prozent der vorhandenen Substanz ab.
a) Stellen Sie eine Rekursionsformel auf, die die Bestimmung von x_{n+1} aus x_n erlaubt. Der Anfangsbestand der Population sei dabei x_0.
b) Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Folge.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$
b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
c) $a_n = 3 - \frac{2n-5}{n^2+7}$
d) $a_n = \frac{5n^3+3n^2+1}{4n^2+7n-2}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$a_n = \sqrt[3]{1-n^3} + n$

Aufgabe 3: (Geometrisches oder exponentielles Wachstum) Eine Population habe den Anfangsbestand $x_0 = x$ und verändere sich mit einem konstanten Geburten- und Sterbesatz von $\frac{g}{100}$ bzw. $\frac{s}{100}$ mit $g, s \geq 0$, d.h. pro Zeiteinheit kommen g% des vorher gegebenen Bestandes hinzu und s% sterben.
Stellen Sie eine Rekursionsformel auf, die die Bestimmung von x_{n+1} aus x_n erlaubt.

Lösungen zu den Präsenzaufgaben, 3.Übung

Aufgabe 1:

a) Induktionsanfang: $\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^0 1^2 = 1 = (-1)^0 \frac{1(1+1)}{2}$: Die Aussage ist für $n = 1$ wahr.

Induktionsvoraussetzung: Sei die Aussage wahr für ein beliebiges $m \in I\!N$, d.h. $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{m-1}\frac{m(m+1)}{2}$.

Induktionsschluss: Dann ist zu zeigen: Die Aussage gilt auch für $m+1 \in I\!N$, d.h. $\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^m \frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Beweis: $\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}k^2 = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}k^2 + (-1)^m(m+1)^2$

$\overset{I.V.}{=} (-1)^{m-1}\frac{m(m+1)}{2} + (-1)^m(m+1)^2 = \frac{1}{2}(-1)^m(m+1)(-m+2(m+1))$

$= \frac{1}{2}(-1)^m(m+1)(m+2)$

Insgesamt folgt damit die Behauptung.

b) Induktionsanfang: $\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$: Die Aussage ist für $n = 1$ wahr.

Induktionsvoraussetzung: Sei die Aussage wahr für ein beliebiges $m \in I\!N$, d.h. $\sum_{k=1}^{m} k \cdot k! = (m+1)! - 1$.

Induktionsschluss: Dann ist zu zeigen: Die Aussage gilt auch für $m+1 \in I\!N$, d.h. $\sum_{k=1}^{m+1} k \cdot k! = (m+2)! - 1$.

Beweis: $\sum_{k=1}^{m+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{m} k \cdot k! + (m+1) \cdot (m+1)!$

$\overset{I.V.}{=} (m+1)! - 1 + (m+1) \cdot (m+1)! = (m+1)!(1 + (m+1)) - 1 = (m+1)!(m+2) - 1$

$= (m+2)! - 1$

Insgesamt folgt damit die Behauptung.

Aufgabe 2:

Induktionsanfang: $1! \geq 2^{1-1} \Leftrightarrow 1 \geq 1$: Die Aussage ist für $n = 1$ wahr.

Induktionsvoraussetzung: Sei die Aussage wahr für ein beliebiges $m \in I\!N$, d.h. $m! \geq 2^{m-1}$.

Induktionsschluss: Dann ist zu zeigen: Die Aussage gilt auch für $m+1 \in I\!N$, d.h. $(m+1)! \geq 2^m$.

Beweis: $(m+1)! = m!(m+1) \overset{I.V.}{\geq} 2^{m-1}(m+1) \overset{n \in I\!N}{\geq} 2^{m-1}(1+1) = 2^{m-1}2 = 2^m$

Insgesamt folgt damit die Behauptung.