Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.- Gyml. D. Dossing

Lösungen zu den Testaufgaben 3

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \to I\!R$ mit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

Lösung: Für die erste Ableitung der Funktion f gilt mit der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Für die zweite Ableitung der Funktion f gilt mit der Quotienten- und Kettenregel:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

b) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche und die lokalen Extrema von f.

Lösung: Mit dem Monotoniekriterium folgt:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow f \text{ ist monoton steigend für } x \in (0; 1)$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow f \text{ ist monoton fallend für } x \in (1; \infty)$$
$$\Rightarrow f \text{ hat ein lokales Maximum bei } H(1|\tfrac{1}{2})$$

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion $f : I\!R \to I\!R$ mit $f(x) = \ln(\frac{1}{2} + e^x)$.

Untersuchen Sie die Funktion f auf

- Nullstellen
- Monotoniebereiche
- lokale Extrema
- Grenzverhalten

Lösung:

- Nullstellen der Funktion f:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + e^x = 1 \Leftrightarrow x = -\ln(2)$$

  Also: f hat eine Nullstelle in $N(-\ln(2)|0)$.

- Monotoniebereiche der Funktion f:

$$f'(x) = \frac{2e^x}{1+2e^x} > 0 \, \text{für alle} \, x \in I\!R$$

Also: f ist monoton steigend auf $I\!R$.

- Lokale Extrema der Funktion f:

Da die Funktion f auf $I\!R$ monoton steigend ist, besitzt sie keine lokalen Extrema!

- Grenzverhalten der Funktion f:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\ln(2)$$

Aufgabe 3: An einer Supermarkt- Kasse werden in 10 Minuten durchschnittlich 6 Kunden bedient.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Minuten genau k Kunden bedient werden?

Lösung: Mit der Poisson- Verteilung für $\lambda = 6$ ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegeben durch:

$$P_6(k) = \frac{6^k}{k!} \cdot e^{-6}$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man als 6. Person in der Schlange nach 10 Minuten noch nicht bedient wurde?

Lösung: Für $k \in \{0, ..., 5\}$ folgt:

$$P_6(0) = e^{-6} \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \, (0,25\%)$$
$$P_6(1) = 6 \cdot e^{-6} \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \, (1,5\%)$$
$$P_6(2) = \frac{36}{2} \cdot e^{-6} \approx 4,5 \cdot 10^{-2} \, (4,5\%)$$
$$P_6(3) = \frac{6^3}{6} \cdot e^{-6} \approx 8,9 \cdot 10^{-2} \, (8,9\%)$$
$$P_6(4) = \frac{6^4}{24} \cdot e^{-6} \approx 0,13 \, (13\%)$$
$$P_6(5) = \frac{6^5}{120} \cdot e^{-6} \approx 0,16 \, (16\%)$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann zu:

$$0,25\% + 1,5\% + 4,5\% + 8,9\% + 13\% + 16\% = 44,15\%$$

Aufgabe 4: Für den radioaktiven Zerfall einer Substanz liegen folgende Meßwerte vor:

$$m(1) = 5 \text{ und } m(4) = 2,$$

(Masseneinheit Gramm, Zeiteinheit Minute).

Bestimmen Sie die Zerfallskonstante k und $m(0)$.

Lösung: Der radioaktive Zerfall wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$m'(t) = -k \cdot m(t)$$

mit

$$m(t) = m(0) \cdot e^{-k \cdot t}$$

Aus der ersten Anfangsbedingung erhält man:

$$m(1) = m(0) \cdot e^{-k} = 5 \Leftrightarrow m(0) = \frac{5}{e^{-k}}$$

Setzt man den Term für $m(0)$ nun in die zweite Anfangsbedingung ein, so erhält man:

$$m(4) = \frac{5}{e^{-k}} \cdot e^{-4k} = 2 \Leftrightarrow e^{-3k} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} \cdot \ln(\frac{2}{5}) \approx 0,31$$

Setzt man nun das Ergebnis von k in die Gleichung für $m(0)$ ein, so erhält man:

$$m(0) = \frac{5}{e^{-0,31}} \approx 6,8$$

Also: $k \approx 0,31$ und $m(0) \approx 6,8$