LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 22. Dezember 2004

6. Übung zur Approximationstheorie

Abgabe: Montag, 10. Januar 2005, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 + 4 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei der Operator U_n von $C_{2\pi}$ in sich gegeben durch

$$U_n f = \begin{cases} f, & f \in \Pi_n, \\ \sigma_n f, & f \notin \Pi_n, \end{cases}$$

wobei σ_n der Fejér-Operator sei. Untersuchen Sie U_n auf Linearität, Stetigkeit, Beschränktheit, Idempotenz, Abbildung *auf* Π_n sowie Konvergenz bzgl. der $C_{2\pi}$-Norm.

b) Geben Sie eine Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Operatoren auf $C[0,1]$ an, die beschränkt, unstetig und nichtlinear sind (für alle $n \in \mathbb{N}$) und für die gilt:

(i) $F_n(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$;

(ii) F_n ist idempotent für alle $n \in \mathbb{N}_0$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|F_n f - f\|_{C[0,1]} = 0$ für alle $f \in C[0,1]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Beweisen Sie den Satz von Marcinkiewicz (vgl. Satz III.8) für reellwertige Funktionen:
Zu jedem reellwertigen $f \in C[a,b]$ existiert eine Dreiecksmatrix $\Delta(f)$ von Stützstellen, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n^{\Delta(f)} f - f\|_{C[a,b]} = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Chebychev-Alternantensatz (Satz IV.2).

Hinweis für die Aufgaben 3-6: Cheney, Chapter 1.5.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt $x_0 \in K$ gibt mit $\inf\limits_{x\in K} |x| = |x_0|$.

Definition: Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $K \subset X$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Jede Linearkombination $\sum_{j=0}^n \lambda_j f_j$ mit $f_j \in K$, $\lambda_j \geq 0$ und $\sum_{j=0}^n \lambda_j = 1$ heißt eine **Konvexkombination** von Elementen aus K. Die Menge $\operatorname{conv}(K)$ aller Konvexkombinationen von Elementen aus K heißt die **konvexe Hülle** von K.

Aufgabe 4 (6 Punkte) (Satz von Carathéodory)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Jeder Punkt $y \in \operatorname{conv}(K)$ lässt sich darstellen als Konvexkombination von höchstens $n+1$ Elementen aus K.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die konvexe Hülle einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist.

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ kompakt. Zeigen Sie, dass das System linearer Ungleichungen

$$a^{\mathrm{t}} \cdot x = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j > 0 \qquad (a = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}} \in K)$$

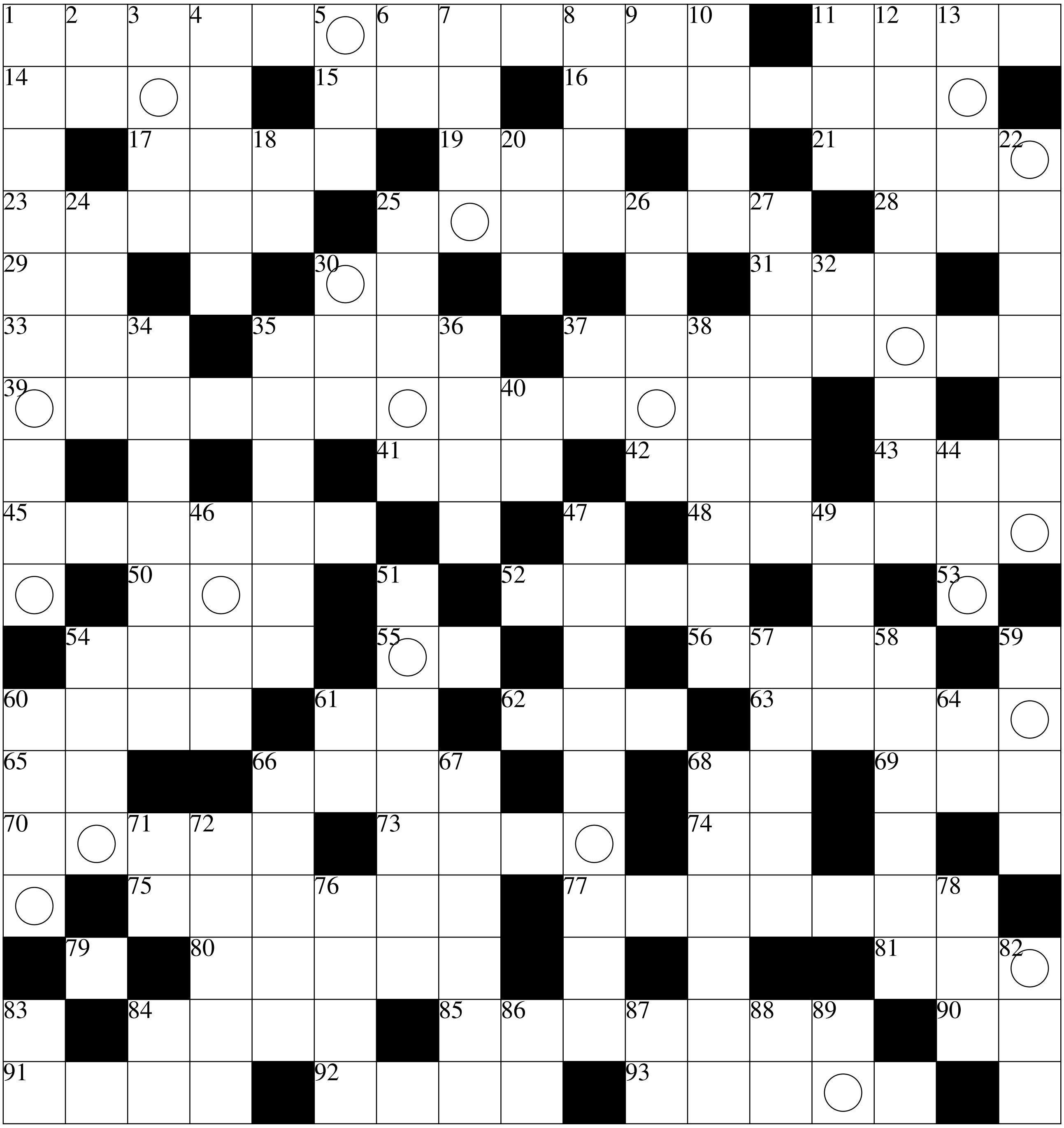
genau dann <u>keine</u> Lösung $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$ hat, wenn $0 \in \operatorname{conv}(K)$ gilt.

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Sei $C(X)$ der Raum aller reellen, stetigen Funktionen f, definiert auf einem kompakten (Hausdorff-) Raum X, versehen mit der Norm $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$. Ferner sei $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ ein System von $n+1$ linear unabhängigen Elementen aus $C(X)$ und $M := \operatorname{span}\{g_0, \ldots, g_n\}$. Zeigen Sie, dass $g = \sum_{j=0}^{n} a_j g_j$ genau dann ein Element bester Approximation aus M zu $f \in C(X)$ ist, falls der Nullpunkt des $\mathbb{R}^{n+1}$ in der konvexen Hülle der Menge $K := \{r(x) \cdot (g_0(x), \ldots, g_n(x))^{\mathrm{t}};\ x \in X_0\}$ liegt. Dabei ist $r := g - f$ und X_0 die Menge aller Extremalpunkte von r, d. h. $X_0 := \{x \in X;\ |r(x)| = \|r\|\}$. (*Hinweis*: Cheney, S.73).

Wir wünschen Euch frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Aufgabe 8 (5* Punkte)

Welches Lösungswort versteckt sich in diesem Kreuzworträtsel?



Waagerecht: **1**: Kantors Sohn (russ.) **11**: Kein zwar ohne ... **14**: Musikinstrument **15**: Verbindung in Fernleihe **16**: Tierischer Teil einer Beweismethode **17**: Ein Wort zum Börsenkrach **19**: Raubtier (Abk.) **21**: Ungesunde Reise **23**: Stadt, Land, Fluss, gegeben J **25**: War in Ägypten und löste die Wärmeleitungsgleichung **28**: Alles neu durch eine Vorsilbe **29**: Niederdeutsche Eule **30**: Gespiegelt ist nicht 40 senkrecht **31**: Schneller als die Gelben? **33**: Sag mal umgedreht **35**: Mafiosi im Gartengerät **37**: Stadt im Meer **39**: Gegeben $\omega(1) = \omega(11) = I$, $\omega(5) = R$, $\omega(13) = N$, gesucht ω **41**: Stadt mit Münster **42**: Verrückter Geheimdienst **43**: Afrikanischer Boxer **45**: Mehrstufige Form des Kölschen Karnevals **48**: Medienmann mit einem Stern **50**: Mathematiker in Liechtenstein **52**: Mit ist nicht ... **53**: $B_n(f_1;x)$ **54**: Gemessener Druck **55**: Kubricks letzter Film **56**: Würzt die Gurkenzeit **60**: Außerkarnevalistische Parade **61**: Im Kopf jeder Übung **62**: Ehemaliger angewandter Mathematiker, insb. Informatiker, oder

Baumarkt **63**: Mühlenabfallprodukt **65**: Vormittags (engl.) **66**: So wird Aufgabe geschrieben **68**: Autor namens Dario **69**: Gehört der Frau **70**: Wo in Aachen die schönsten Schlangen gedeihen **73**: Rom für die alten Römer **74**: Negativ konnotierte Vorsilbe **75**: Vertauschbar mit 68 senkrecht **77**: Ehemaliger Mathematiker im Rektorat **79**: Erscheint, wenn man die große Taste auf der Tastatur drückt **80**: Zusammenfassung von wohlbestimmten, wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen **81**: Alter Tipp **84**: Anwendung von 33 waagerecht **85**: Steinchenreiche Stadt in Italien **90**: Nächstes Semester **91**: Blau wie der Himmel **92**: Schweinemann **93**: Fundamentale Eigenschaft von Mengen mit poetischer Steigerung

Senkrecht: **1**: Verwandtschaftsgrad von p und q **2**: Teil einer math. Bildung **3**: Induziert eine enorme Topologie **4**: (taxi without i) ohne s **5**: Läppisches Tier **6**: Sprechweise dieser Notation **7**: Schnellstes Verkehrsmittel innerhalb des Grabenrings (schweizerisch) **8**: Gott des Donnerstags **9**: Firmenteil **10**: Geht sie nicht auf, geht der Kuchen unter **11**: Dramatisches an Bakterien **12**: Math. Schmuckstück **13**: Großer See **18**: In Rivlin nicht out **20**: Ihn (lat.) **22**: Mathematiker mit malerischer Hälfte **24**: Schwung à la Lagrange **25**: Nannte seinen Satz Lemma **26**: Eng befreundet **27**: Nachbarland von Burundi **30**: Another word for function **32**: Polynomräume **34**: Integralmittler **35**: Berühmter Tatort in einem James-Bond Film **36**: Nicht die Speiche **37**: >XT **38**: Von einem Ami entliehen **40**: 1043 Sitzplätze **44**: Gesetz der Römer **46**: Sieht ein Ire in 13 senkrecht **47**: Chevy Chase math. fast-Namensvetter **49**: $\int_{-1}^{1} C_{20}(x) C_{05}(x) \sqrt{1-x^2}^{-1}\, dx$ **51**: Mangel glättet auch **54**: Franz. Band **57**: Russ. Gottesbild **58**: Dürfte nicht schwer sein **59**: Teil von Äpfeln, Pudeln und singulären Integralen **60**: Tierischer Lehrstuhl **61**: Invariant unter Konjugation **64**: Im Hause **66**: Raubte uns bei der Interpolation die Illusion **67**: Eine der ältesten Städte Deutschlands im Ruderschiff **68**: Kurz für „wird schon vertauschbar sein“ **71**: Anfänge einer neuen Folge **72**: Hier stand eine der Wiegen der Mathematik **76**: Fluss durch Kornelimünster **78**: Musik im Mais **82**: Geheimnisumwitterter griech. Buchstabe **83**: Der Öcher meint nicht wahr **84**: Strahlende Stadt (Kfz-Kennz.) **86**: 10^8 mm^2 **87**: Männlicher Vorname **88**: Macht Mediziner krank **89**: Zum Schluss ein Laut des Staunens