LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 10. Dezember 2004

5. Übung zur Approximationstheorie

Abgabe: Montag, 20. Dezember 2004, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Für $\tau > 1$ sei $f_\tau \in C_{2\pi}$ definiert durch

$$f_\tau(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{-\tau} \cos(3^\nu x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass Konstanten $M_1, M_2 > 0$ existieren, so dass

$$\frac{M_1}{(\log n)^{\tau-1}} \leq E_n(f_\tau) \leq \frac{M_2}{(\log n)^{\tau-1}}$$

für $n \geq 3$ und $\tau > 1$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Beweisen Sie Lemma VI.9 der Vorlesung:
Sei X ein linearer normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist strikt konvex.

(ii) Der Raum X ist **streng normiert**, d. h. aus $f, g \neq 0$ und $\|f+g\|_X = \|f\|_X + \|g\|_X$ folgt $f = \gamma g$ für ein $\gamma > 0$.

(iii) Der Rand der Einheitskugel, d. h. die Menge $\{f \in X;\ \|f\|_X = 1\}$, enthält keine nichttriviale Strecke.

(iv) Aus $f, g \in X$ mit $f \neq g$ und $\|f\|_X = \|g\|_X = 1$ folgt $\|\alpha f + (1-\alpha) g\|_X < 1$ für alle $\alpha \in (0,1)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Beweisen Sie Lemma VI.10 der Vorlesung:
Sei X ein linearer normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist gleichmäßig konvex.

(ii) Zu beliebigen $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $f, g \in X$ aus $\|f\|_X < r + \delta$, $\|g\|_X < r + \delta$ und $\|f - g\|_X > \varepsilon$ stets $\|f + g\|_X < 2r$ folgt.

(iii) Für alle Folgen $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$ in X folgt aus $\|f_n\|_X < 1$, $\|g_n\|_X < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \|f_n + g_n\|_X = 2$ stets $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\|_X = 0$.

Aufgabe 4 $(2+2$ Punkte)
Beweisen Sie Lemma VI.11 der Vorlesung:
Sei X ein linearer normierter Raum. Dann gilt:

a) Ist X gleichmäßig konvex, so ist X strikt konvex.

b) Ist X endlichdimensional und strikt konvex, dann ist X gleichmäßig konvex.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Räume $C[a,b]$ und $L^1[a,b]$ nicht strikt konvex sind.

Aufgabe 6 $(2+4+1$ Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden Räume gleichmäßig und somit auch strikt konvex sind.

a) Jeder Hilbertraum (*Hinweis*: Parallelogrammidentität).

b) Zeigen Sie die Behauptung für eine der beiden folgenden Klassen von Räumen.

(i) $L^p(a,b)$ für $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 < p < \infty$ (Literatur: A. Schönhage, S. 43).

(ii) ℓ^p für $1 < p < \infty$, wobei

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1};\ \|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

(Literatur: Köthe, Topological vector spaces, §26.7).

c) $(\mathbb{R}^n;\ \|\cdot\|_p)$ für $1 < p < \infty$.

Aufgabe 7 $(3+2$ Punkte)
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $X_k := \left(\mathbb{R}^2;\ \|\cdot\|_{1+1/k}\right)$, und der Raum Y sei definiert durch

$$Y = \left\{ y = (y_k)_{k\geq 1};\ y_k \in X_k,\ \|y\|_Y := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|_{X_k}^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Beweisen Sie, dass der Raum Y

a) strikt konvex ist.

b) nicht gleichmäßig konvex ist.

Hinweis: Benutzen Sie in a) die strikte Konvexität der Räume X_k und ℓ^2 und wählen Sie in b) als Testpunkte auf dem Rand der Einheitskugel von Y die Punkte $y^{(k)} := (0,\ldots,0,y_k,0,\ldots)$, $z^{(k)} := (0,\ldots,0,z_k,0,\ldots)$ mit $y_k = (1,0) \in X_k$ und $z_k = (0,1) \in X_k$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$.