LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 9. November 2004

3. Übung zur Approximationstheorie

Abgabe: Montag, 22. November 2004, 12 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass für den Dirichlet-Kern D_n gilt

$$\lambda_n = \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_{L^1_{2\pi}} > \frac{4}{\pi^2}\log n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung des Dirichlet-Kerns als Quotient zweier Sinus-Funktionen aus Lemma II.8. Schätzen Sie $\|D_n\|_{L^1_{2\pi}}$ gegen das Integral $(2/\pi)\int_0^n (|\sin \pi x|/x)\,dx$ nach unten ab und spalten Sie dieses in n Integrationsbereiche der Länge 1 auf.

Aufgabe 2 ($6+1$ Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sowie $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ paarweise verschieden. Weiter sei $f \in C[a,b]$ derart, dass $f^{(n+1)}(x)$ für alle $x \in (a,b)$ existiert.

a) Zeigen Sie, dass es dann ein $\xi \in (a,b)$ gibt, so dass für das zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ gehörige Lagrange-Interpolationspolynom $L_n f$ gilt:

$$f(x) - L_n(f;x) = w_{n+1}(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Dabei ist $w_{n+1}(x)$ wie in Lemma III.1 definiert.

b) Beweisen Sie Satz III.3.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Sei $[a,b]$ ein endliches Intervall und $f(x) = e^x$. Zeigen Sie, dass dann die Lagrange-Interpolationspolynome $L_n f$ für jede beliebige Wahl von Stützstellen aus $[a,b]$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergieren.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Beweisen Sie Lemma III.2 der Vorlesung:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\cos n\theta$ darstellbar in der Form

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,n}\cos^k\theta \qquad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R}$$

für gewisse Konstanten $a_{k,n} \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 $(4 \times 1$ Punkte$)$
Beweisen Sie Lemma III.3:

a) Es gilt die Rekursionsformel:
$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist C_n gerade (bzw. ungerade), falls n gerade (bzw. ungerade) ist.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ hat C_n genau die n einfachen Nullstellen $x_{k,n} := \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$, $1 \leq k \leq n$.

d) Für $n \in \mathbb{N}$ hat C_n die Extremwerte ± 1 auf $[-1,1]$. Diese Werte werden genau an den Stellen $x'_{k,n} := \cos \frac{2k}{2n}\pi$, $0 \leq k \leq n$, angenommen. Es gilt $C_n(x'_{k,n}) = (-1)^k$, $0 \leq k \leq n$.

Aufgabe 6 (2 Punkte)
Beweisen Sie Lemma III.4 der Vorlesung:
Für $k, j \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\int_{-1}^{1} C_k(x)C_j(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \pi & \text{, falls } k = j = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{, falls } k = j \neq 0, \\ 0 & \text{, falls } k \neq j. \end{cases}$$

Aufgabe 7 $(2+1$ Punkte$)$

a) Gegeben seien die Polynome
$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}x^j \in \mathcal{P}_k$$
mit $a_{k,k} \neq 0$ für $0 \leq k \leq n$. Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $q_n \in \mathcal{P}_n$ eindeutig bestimmte Zahlen $c_k \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq n$, existieren, so dass
$$q_n = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k.$$

b) Zeigen Sie, dass die Chebychev-Polynome jeweils ein Fundamentalsystem bilden in $C[-1,1]$ bzw. in $L^p(-1,1)$, $1 \leq p < \infty$.

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_j \in [-\pi,\pi)$, $0 \leq j \leq 2n$, paarweise verschiedene Stützstellen sowie $y_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq 2n$, beliebige Stützwerte. Das Problem, ein trigonometrisches Polynom $t_n \in \Pi_n$ zu finden, so dass
$$t_n(x_j) = y_j \qquad \text{für alle } 0 \leq j \leq n,$$
heißt **(trigonometrisches) Lagrange-Interpolationsproblem**. Ferner heißt t_n **(trigonometrisches) Lagrange-Interpolationspolynom**.

Aufgabe 8 $(4+2+2$ Punkte$)$
Zeigen Sie:

a) Das trigonometrische Lagrange-Interpolationsproblem ist eindeutig lösbar und das zugehörige Interpolationspolynom ist gegeben durch die **Gaußformel**
$$t_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} y_j \lambda_j(x),$$
wobei
$$\lambda_j(x) := \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_j-x_m}{2}\right)}.$$

b) Mit

$$\omega_{n+1}(x) := 2^{2n+1}\prod_{j=0}^{2n}\sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)$$

gilt die Darstellung

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{n+1}(x)}{2\sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)\omega'_{n+1}(x_j)} & \text{, falls } x \neq x_j, \\ 1 & \text{, falls } x = x_j. \end{cases}$$

c) Für äquidistant verteilte Stützstellen

$$x_{j,n} := \frac{2j\pi}{2n+1} \qquad (-n-1 \leq j \leq n+1)$$

zeige man die Darstellung

$$t_n(x) = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} y_j D_n(x - x_{j,n}),$$

wobei D_n den n-ten Dirichlet-Kern bezeichne.

Aufgabe 9 $(1+2$ Punkte)
Beweisen Sie:

a) Es existiert genau ein beschränkter linearer Operator $\Lambda_n : C_{2\pi} \to \Pi_n$, so dass für jedes $f \in C_{2\pi}$ gilt

$$(\Lambda_n f)(x_j) = f(x_j) \qquad \text{für alle } 0 \leq j \leq 2n.$$

$\Lambda_n f$ heißt **(trigonometrisches) Lagrange-Interpolationspolynom** vom Grad n von f bzgl. der Stützstellen x_j, $0 \leq j \leq 2n$, und ist gegeben durch

$$(\Lambda_n f)(x) = \sum_{j=0}^{2n} f(x_j)\lambda_j(x).$$

b) Der Lagrange-Interpolationsoperator Λ_n ist eine Projektion auf Π_n, d. h. es gilt zusätzlich:

(i) Zu jedem $t_n \in \Pi_n$ existiert ein $f \in C_{2\pi}$ mit $\Lambda_n f = t_n$.

(ii) Λ_n ist idempotent, d. h.

$$\Lambda_n(\Lambda_n f) = \Lambda_n f \qquad \text{für alle } f \in C_{2\pi}.$$