LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 14. Oktober 2004

1. Übung zur Approximationstheorie

Abgabe: Montag, 25. Oktober 2004, 12 Uhr

Hinweise zum Übungsbetrieb Die Übungen sollen möglichst zu zweit bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie jeweils bis zum auf dem Übungsblatt angegebenen Termin ab, entweder beim Übungsleiter oder in den Übungskasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls (Raum 155 im Hauptgebäude).

Zum Erwerb eines Übungsscheins bzw. eines qualifizierten Studiennachweises müssen 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. Wer mindestens einmal die Lösung einer Aufgabe vorrechnet, muss nur 40% der Gesamtpunktzahl erreichen. Falls Sie einen Schein erwerben wollen, dann melden Sie sich bitte unter der u. a. Adresse zur Übung an.

Die Übungsblätter und weiteres Material zur Vorlesung sind auch im Internet erhältlich unter
`http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/ws04/approximationstheorie/`

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Ein Operator I von $C[a,b]$ in sich sei gegeben durch

$$I(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Phi_k(x) \qquad \text{für alle } x \in [a,b],$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_k \in C[a,b]$ und die $x_k \in [a,b]$ paarweise verschieden seien. Zeigen Sie, dass der Operator I genau dann positiv ist, wenn gilt:

$$\Phi_k(x) \geq 0 \qquad \text{für } 0 \leq k \leq n \text{ und für alle } x \in [a,b].$$

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)
Sei $B_n f$ das n-te Bernstein-Polynom der Funktion $f \in C[0,1]$, d. h.

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \text{für alle } x \in [0,1] \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie (J. Favard, 1949):

$$B_n\left(x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{m-1}{n}\right);t\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)t^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

Hinweis: Für die Funktion $g_m(x) := \prod_{j=0}^{m-1}(x-j)$ zeige man zunächst die Identität $g_m(k)\binom{n}{k} = g_m(n)\binom{n-m}{k-m}$ für alle $k,m,n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq k \leq n$.

b) Berechnen Sie $B_n(f_k;x)$ für $0 \leq k \leq 3$, wobei $f_k(x) := x^k$ ist.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

b) Für $x \in [0,1]$ sei $A_\delta(x) := \{k \in \mathbb{N}_0;\ k \leq n,\ |\frac{k}{n} - x| \geq \delta\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass für jedes $\delta > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ gilt:

$$\sum_{k \in A_\delta(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}.$$

c) Geben Sie einen direkten Beweis (ohne Benutzung des Satzes von Bohman-Korovkin) dafür, dass die Bernstein-Polynome einen Approximationsprozess auf $C[0,1]$ bilden.

Hinweis: Setzen Sie wie folgt an:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f;x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f(\tfrac{k}{n})\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \left\{ \sum_{k \in A_\delta(x)} + \sum_{k \in B_\delta(x)} \right\} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \end{aligned}$$

wobei $B_\delta(x) := \{k \in \mathbb{N}_0;\ k \leq n,\ |\frac{k}{n} - x| < \delta\}$ ist, und zeigen Sie, dass beide Summen für genügend großes n kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ sind.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Zeigen Sie anhand der Operatoren $T_n : C[a,b] \to C[a,b]$

$$T_n(f;x) := \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right) \qquad \text{für alle } x \in [a,b] \text{ und alle } n \in \mathbb{N},$$

dass es beim Satz von Bohman-Korovkin i. A. nicht ausreicht, nur die beiden Testfunktionen f_0 und f_1 zu betrachten.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Sei $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver linearer Operatoren von $C[a,b]$ in $C[c,d]$ mit $[c,d] \subset [a,b]$, und $f_0(u) \equiv 1$, $\varphi_x(u) = (x-u)^2$. Zeigen Sie, dass aus

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n f_0 - f_0\|_{C[c,d]} = \lim_{n \to \infty} \|T_n(\varphi_x; x)\|_{C[c,d]} = 0$$

folgt:

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n f - f\|_{C[c,d]} = 0 \qquad \text{für alle } f \in C[a,b].$$

Hinweis: Gehen Sie von der im Beweis zu Satz 3 hergeleiteten Ungleichung

$$|f(x) - f(u)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_{C[a,b]} \delta^{-2} \varphi_x(u) \qquad \text{für alle } x, u \in [a,b] \text{ und alle } f \in C[a,b]$$

aus.

Aufgabe 6 $(2+1+2+3$ Punkte$)$
Für $f \in C[0,1]$ sind die Operatoren von Landau-Stieltjes definiert durch

$$I_{2n}(f;x) := \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 \left(1-(u-x)^2\right)^n f(u)\, du \qquad \text{für alle } x \in [0,1] \text{ und alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $\lambda_n := \int_{-1}^{1} (1-u^2)^n \, du$ ist.

a) Zeigen Sie für die Normierungsfaktoren λ_n:

(i) $\lambda_n = 2 \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lambda_n > \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass I_{2n} ein positiver Operator von $C[0,1]$ in $\mathcal{P}_{2n}$ ist.

c) Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 5, dass für alle $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|I_{2n}(f;x) - f(x)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0 \qquad \text{für alle } f \in C[0,1].$$