LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 7. Januar 2004

11. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 19. Januar 2004 vor der Übung

Aufgabe 1 $(4+7$ Punkte$)$
Sei $\Phi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $C^{(n)}[a,b]$ der Raum der auf dem Intervall $[a,b]$ n-fach stetig differenzierbaren Φ–wertigen Funktionen. Zeigen Sie:

a) $C^{(n)}[a,b]$ ist ein Banachraum unter der Norm

$$\|f\|_{C^{(n)}[a,b]} := \max\left\{|f(a)|, |f'(a)|, \ldots, |f^{(n-1)}(a)|, \|f^{(n)}\|_{C[a,b]}\right\}.$$

b) Der duale Raum $(C^{(n)}[a,b])'$ ist isometrisch isomorph zu $NBV[a,b] \times \mathbb{R}^n$ versehen mit der Norm

$$\|(g, c_0, \ldots, c_{n-1})\|_{NBV[a,b]\times\mathbb{R}^n} := \|g\|_{NBV[a,b]} + \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|.$$

Dabei ist der Isomorphismus gegeben durch

$$T(g, c_0, \ldots, c_{n-1}) = f^*, \text{ wobei } f^*(f) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k f^{(k)}(a) + \int_a^b f^{(n)}(t)\, dg(t) \text{ für alle } f \in C^{(n)}[a,b].$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Formel mit Integralrestglied.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Seien X, Y zwei lineare normierte Räume über dem Körper Φ mit $Y \subset X$ und existiere ein $K > 0$, so dass $\|f\|_X \leq K\|f\|_Y$ für alle $f \in Y$. Y heißt dann **stetig eingebettet in** X. Zeigen Sie, dass in diesem Fall für jedes $f' \in X'$ die Restriktion $f'|_Y$ ein Element aus Y' ist mit $\|f'|_Y\|_{Y'} \leq K\|f'\|_{X'}$.

Aufgabe 3 $(2+5+5$ Punkte$)$
Beweisen Sie Satz III.15 der Vorlesung:

a) Ist X ein reflexiver linearer normierter Raum, so auch X'.

b) Ist X ein Banachraum und X' reflexiv, dann ist auch X reflexiv.

c) Ist X ein reflexiver (Banach-)Raum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, dann ist Y ebenfalls reflexiv.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Beweisen Sie den **Satz von Radon–Riesz** für l^p $(1 < p < \infty)$:
Sei $1 < p < \infty$ und sei $(f^{(n)})_{n\geq 1}$ eine Folge in l^p sowie $f^{(0)} \in l^p$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \|f^{(n)} - f^{(0)}\|_p = 0$$

genau dann, wenn $(f^{(n)})_{n\geq 1}$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(i) $\operatorname*{w-lim}_{n\to\infty} f^{(n)} = f^{(0)}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|f^{(n)}\|_p = \|f^{(0)}\|_p$.