LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 15. Dezember 2003

10. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Mittwoch, 7. Januar 2004 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (8^* Punkte)
Beweisen Sie Lemma III.4 der Vorlesung:

Für $g \in BV[a,b]$ gilt $g \sim 0$ genau dann, wenn $g(a) = g(b)$ und $g(t+) = g(t-) = g(a)$ für alle $t \in (a,b)$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis): Für $g \in BV[a,b]$ und $t \in (a,b)$ gilt

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g(u)\, du = g(t+) \quad \text{und} \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} g(u)\, du = g(t-).$$

Aufgabe 2 ($2^* + 5^*$ Punkte)
Beweisen Sie Lemma III.5 der Vorlesung:

a) Sind $g_1, g_2 \in NBV[a,b]$ mit $g_1 \sim g_2$, dann gilt $g_1 = g_2$.

b) Für $g \in BV[a,b]$ ist die durch

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } t = a, \\ g(t+) - g(a) & \text{, falls } a < t < b, \\ g(b) - g(a) & \text{, falls } t = b, \end{cases}$$

definierte Funktion h normalisiert und es gilt $g \sim h$ sowie $[\operatorname{Var} h]_a^b \leq [\operatorname{Var} g]_a^b$.

Aufgabe 3 ($5 + 5 + 4$ Punkte)
Zeigen Sie:

a) Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

b) Der Raum l^p mit $1 < p < \infty$ ist reflexiv.

c) Der Raum l^1 ist nicht reflexiv.

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie:

(i) Aus $X \widehat{=} Y$ folgt $X' \widehat{=} Y'$.

(ii) Aus $X \widehat{=} Y$ und X separabel folgt Y separabel.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Zeigen Sie am Beispiel von l^2, dass aus schwacher Konvergenz i. A. nicht die starke Konvergenz (gegen denselben Grenzwert) folgt (vgl. Lemma IV.1d).

Wir wünschen Euch frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!