LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 8. Dezember 2003

9. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: **Freitag, 19. Dezember 2003** vor der Vorlesung

Definition: Ein Operator $T : C[a,b] \to C[a,b]$ heißt **positiv**, falls für jedes $f \in C[a,b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ auch $T(f;x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Aufgabe 1 $(1+3$ Punkte)
Sei $T : C[a,b] \to C[a,b]$ ein positiver linearer Operator. Zeigen Sie:

a) Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ folgt $T(f;x) \leq T(g;x)$ für alle $x \in [a,b]$.

b) Ist $f_0(x) = 1$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt:

$$\|T\|_{[C[a,b]]} = \|Tf_0\|_{C[a,b]}.$$

Aufgabe 2 $(3+9$ Punkte)
Seien $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine $n \times n$–Matrix und T der durch $Tf := A \cdot f$ für alle $f \in \mathbb{C}^n$ definierte lineare Operator von $\langle \mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p \rangle$ in sich. Zeigen Sie:

a) $\|T\|_{[\infty,\infty]} = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{k=1}^n |a_{ik}|$ (vgl. Lemma II.8).

b) $\|T\|_{[2,2]} = \left(\max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|\right)^{1/2}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A^{\mathrm{ad}}A$ sind und $A^{\mathrm{ad}} := (\overline{A})^T = (\overline{a_{ki}})_{k,i=1}^n$ die zu A adjungierte Matrix ist (d. h. bzgl. des Skalarproduktes $(\cdot,\cdot)$ des Raumes gilt $(Af,g) = (f, A^{\mathrm{ad}}g)$ für alle $f,g \in \mathbb{C}^n$).
Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis), dass $A^{\mathrm{ad}}A$ hermitesch und damit auch insbesondere normal ist und dass somit nach dem **Hauptsatz über normale Abbildungen** eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $A^{\mathrm{ad}}A$ existiert.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Sei X ein linearer normierter Raum über $\Phi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Gegeben seien eine beliebige Indexmenge I, eine Familie $\{f_\alpha;\ \alpha \in I\} \subset X$ und eine Familie $\{c_\alpha;\ \alpha \in I\} \subset \Phi$. Zeigen Sie, dass genau dann ein beschränktes lineares Funktional $f' \in X'$ mit

(i) $f'(f_\alpha) = c_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ und

(ii) $\|f'\|_{X'} \leq M$

existiert, wenn für jede endliche Teilfamilie $\mathcal{J} \subset I$ und jede Wahl von Zahlen $\{\beta_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{J}\} \subset \Phi$ die folgende Ungleichung gilt:

$$|\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \beta_\alpha c_\alpha| \leq M \|\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \beta_\alpha f_\alpha\|_X.$$

Aufgabe 4 $(5+7$ Punkte$)$

a) Zeigen Sie, dass $(c_0)'$ kongruent zu l^1 ist. Verwenden Sie hierzu die Abbildung $T : l^1 \to (c_0)'$, die durch $Tg := f'$ definiert ist, wobei f' gegeben ist durch

$$f'(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k \qquad \text{für alle } f = (f_k)_{k\geq 1} \in c_0.$$

b) Zeigen Sie, dass c' kongruent zu l^1 ist. Verwenden Sie hierzu die Abbildung $T : l^1 \to c'$, die durch $Tg = f'$ definiert ist, wobei f' gegeben ist durch

$$f'(f) := \sum_{k=1}^{\infty} f_{k-1} g_k \qquad \text{für alle } f = (f_k)_{k\geq 1} \in c.$$

Hierbei wird $f_0 := \lim_{k\to\infty} f_k$ gesetzt.

Hinweis: Zerlegen Sie $f \in c$ in $f_0 e + (f - f_0 e)$, wobei $e = (1, 1, \dots) \in c$ ist.