LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 1. Dezember 2003

8. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 8. Dezember 2003 vor der Übung

Aufgabe 1 $(2+4$ Punkte)

a) Seien X und Y zwei Mengen sowie $S : X \to Y$ und $T : Y \to X$ Abbildungen mit

$$\begin{aligned} (TS)(x) &= x \qquad \text{für alle } x \in X, \\ (ST)(y) &= y \qquad \text{für alle } y \in Y. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass S und T bijektive Abbildungen sind mit

$$S^{-1} = T \quad \text{und} \quad T^{-1} = S.$$

b) Sei X ein Banach-Raum und $L \in [X]$ mit $\|L\|_{[X]} < 1$. Zeigen Sie, dass $I - L$ ($I =$Identitätsabbildung in $[X]$) bijektiv ist und dass

$$(I-L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k \qquad \text{(Neumannsche Reihe)},$$

mit $L^0 := I$

$$\|(I-L)^{-1}\|_{[X]} \leq \frac{1}{1-\|L\|_{[X]}}$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Beweisen sie Satz III.6 a) der Vorlesung:
Sei $n \in \mathbb{N}$ und X ein linearer normierter Raum der Dimension n. Zeigen Sie, dass dann X' ebenfalls n-dimensional ist.

Hinweis: Wenden Sie Satz III.5 auf die von jeweils $n-1$ Basiselementen von X aufgespannten Unterräume an.

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Sei X ein linearer normierter Raum über $\Phi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset X$ eine Menge linear unabhängiger Elemente. Zeigen Sie, dass eine Zahl $C > 0$ existiert, so dass

$$\|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n\|_X \geq C(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|) \qquad \text{für alle } \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \Phi.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Äquivalenz von $\langle \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}, \|\cdot\|_X \rangle$ und $\langle \Phi^n, \|\cdot\|_\infty \rangle$ aus.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Beweisen Sie folgende Erweiterung von Satz III.6 c) der Vorlesung:
Seien X und Y zwei lineare normierte Räume über $\Phi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und T ein linearer Operator von X in Y. Zeigen Sie: Ist X endlichdimensional, dann ist T beschränkt.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.

Aufgabe 5 $(1+9+1$ Punkte)
Beweisen Sie Satz III.9 und Folgerung III.5 der Vorlesung:
Sei $1 \leq p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$.

a) Ist $g = (g_k)_{k\geq 1} \in l^q$, so definiert

$$f'(f) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k \qquad \text{für alle } f = (f_k)_{k\geq 1} \in l^p \tag{1}$$

ein beschränktes lineares Funktional f' auf l^q.

b) Ist $f' \in (l^p)'$, so existiert ein eindeutiges $g \in l^q$, so dass f' durch (1) dargestellt werden kann. Weiter gilt: $\|f'\|_{(l^p)'} = \|g\|_{l^q}$.

c) Die Abbildung $T : (l^p)' \to l^q$, die definiert ist durch $f' \mapsto g$, ist bijektiv, linear und isometrisch, d. h. $(l^p)'$ ist kongruent zu l^q.

Hinweis: G. Bachmann und L. Narici, S. 206–208 oder A.E. Taylor, S. 194/95.