LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 3. November 2003

4. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 10. November 2003 vor der Übung

Hinweis: Sofern Sie sich noch nicht zu den Übungen zur Funktionalanalysis angemeldet haben, holen Sie das bitte nach. Anmelden können Sie sich im Internet unter

`http://www.mathA.rwth-aachen.de:8002/`

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Seien $\langle X, \rho_X \rangle$ ein metrischer Raum, $A \subset X$ dicht in X und $\langle Y, \rho_Y \rangle$ ein vollständiger metrischer Raum. Auf A sei eine gleichmäßig stetige Abbildung $T : A \to Y$ definiert. Zeigen Sie, dass dann auch eine gleichmäßig stetige Abbildung $\hat{T} : X \to Y$ existiert mit

$$\hat{T} f = T f \qquad \text{für alle } f \in A.$$

Diese Abbildung $\hat{T}$ heißt eine **Fortsetzung** von T auf X. Zeigen Sie weiterhin, dass die Fortsetzung $\hat{T}$ eindeutig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$, $-\infty < a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b < \infty$ und $l_k \in C[a,b], k = 0, \ldots, n$. Der **Lagrange-Interpolationsoperator** $L : C[a,b] \to C[a,b]$ sei definiert durch

$$L(f;x) := \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x).$$

Bestimmen Sie die Operatornorm von L.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und X, Y zwei n–dimensionale LNR (über demselben Körper Φ). Zeigen Sie, dass X und Y äquivalent sind (vgl. Lemma II.4).

Definition: Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine endliche Folge von Zahlen $Z = \{t_j\}_{j=0}^{n}$ mit der Eigenschaft $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ heißt eine **Zerlegung des Intervalls [a,b]**. Die **Norm der Zerlegung** Z ist definiert durch

$$\|Z\| := \max_{0 \leq k \leq n-1} |t_{k+1} - t_k|.$$

Die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ wird mit $\mathcal{Z}[a,b]$ bezeichnet.
Eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **von beschränkter Variation auf [a,b]**, falls

$$[\operatorname{Var} g]_a^b := \sup_{Z \in \mathcal{Z}[a,b]} \sum_{k=0}^{n-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k)| < \infty.$$

Die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation auf $[a,b]$ wird mit $BV[a,b]$ bezeichnet.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Für $f \in BV[a,b]$ sei $\|f\|_{BV} := |f(a)| + [\operatorname{Var} f]_a^b$. Zeigen Sie, dass $\langle BV[a,b], \|\cdot\|_{BV} \rangle$ ein Banachraum ist.