LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 27. Oktober 2003

3. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 3. November 2003 vor der Übung

Aufgabe 1 $(4+5+3$ Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum separabel ist.

b) Zeigen Sie, dass der Raum $\langle s, \rho_s \rangle$ separabel ist.

c) Zeigen Sie, dass der Raum $\langle l^\infty, \rho_\infty \rangle$ nicht separabel ist.
Hinweis: Zu einer beliebigen abzählbaren Menge $A = \{f^{(n)}; n \in \mathbb{N}\} \subset l^\infty$ mit $f^{(n)} = (f_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Folge $\tilde{f} = (\tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\tilde{f}_k := \begin{cases} f_k^{(k)} + 1, & \text{falls } |f_k^{(k)}| < 1 \\ 0, & \text{falls } |f_k^{(k)}| \geq 1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 $(4+10$ Punkte) Seien $0 < b < \infty, g \in C[0,b]$ und der Kern $K \in C([0,b] \times [0,b])$.

a) Zeigen Sie, dass die **Fredholm-Integralgleichung**

$$f(t) = g(t) + \mu \int_0^b K(s,t) f(s)\, ds, \qquad t \in [0,b],$$

genau eine Lösung $f \in C[0,b]$ besitzt, falls $|\mu| < \mu_0$ für ein gewisses $\mu_0 > 0$. Geben Sie ein solches μ_0 an.
Hinweis: Benutzen Sie den Banach–Fixpunktsatz.

b) Zeigen Sie, dass die **Volterra-Integralgleichung**

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t) f(s)\, ds, \qquad t \in [0,b],$$

genau eine Lösung $f \in C[0,b]$ besitzt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $T(f;t) := g(t) + \int_0^t K(s,t) f(s)\, ds$ die Abbildung T^n für ein genügend großes $n \in \mathbb{N}$ eine echte Kontraktion ist.