LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 20. Oktober 2003

2. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 27. Oktober 2003 vor der Übung

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Vervollständigung eines metrischen Raums bis auf Isometrie eindeutig ist. Sind also $\langle X,\rho\rangle$ ein metrischer Raum und $\langle \tilde{X},\tilde{\rho}\rangle$ sowie $\langle \tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{\rho}}\rangle$ Vervollständigungen von $\langle X,\rho\rangle$, so sind $\langle \tilde{X},\tilde{\rho}\rangle$ und $\langle \tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{\rho}}\rangle$ isometrisch.

Aufgabe 2 ($16+5+5+3+3$ Punkte)
Beweisen Sie die folgende Version von Satz I.9 der Vorlesung:
Seien $\langle X,\rho\rangle$ ein metrischer Raum und $A \subset X$.

a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

   (i) A ist kompakt.

   (ii) Jede unendliche Teilmenge von A besitzt mindestens einen Häufungspunkt in A. Man nennt A dann auch **Bolzano–Weierstraß–kompakt**.

   (iii) Jede unendliche Folge von Elementen aus A enthält eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A. Die Menge A heißt dann auch **folgenkompakt**.

   (iv) Der metrische Raum $\langle A,\rho\rangle$ ist vollständig und A ist total beschränkt. Dabei heißt A **total beschränkt**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $B_\varepsilon \subset A$ existiert mit

$$A \subset \bigcup_{f\in B_\varepsilon} S_\varepsilon(f).$$

   (v) Jede Familie $\mathcal{F} = \{A_\alpha;\ \alpha \in I\}$ von in $\langle A,\rho\rangle$ abgeschlossenen Mengen $A_\alpha \subset A$, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, erfüllt

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset.$$

   Dabei besitzt $\mathcal{F}$ die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn für jede endliche Teilmenge $E \subset I$ stets $\bigcap_{\alpha\in E} A_\alpha \neq \emptyset$ gilt.

b) Ist A kompakt, dann ist A auch abgeschlossen und beschränkt.

c) Mit A ist auch jede abgeschlossene Teilmenge von A kompakt.

d) Es seien $\langle X,\rho_X\rangle$ und $\langle Y,\rho_Y\rangle$ metrische Räume, $T : X \to Y$ stetig sowie $A \subset X$ kompakt. Dann ist $T(A)$ kompakt in Y.

e) Zu jeder stetigen Abbildung T von einem metrischen Raum $\langle X,\rho_X\rangle$ nach $\langle \mathbb{R},\rho_{\mathrm{nat}}\rangle$ und jeder kompakten Menge $A \subset X$ existieren Elemente $f,g \in A$ mit

$$T(f) = \sup_{h\in A} T(h), \qquad T(g) = \inf_{h\in A} T(h).$$