LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 15. Oktober 2003

1. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 20. Oktober 2003 vor der Übung

Hinweis Am Montag, dem 20. 10. 2003, findet anstelle der Übung eine Vorlesung statt.

Hinweise zum Übungsbetrieb Jeweils montags gibt es ein neues Übungsblatt. Die Übungen sollen möglichst zu dritt bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie jeweils bis zum auf dem Übungsblatt angegebenen Termin ab, entweder beim Übungsleiter oder in den Übungskasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls (Raum 155 im Hauptgebäude).
Zum Erwerb eines Übungsscheins bzw. eines qualifizierten Studiennachweises müssen 50% der Gesamtpunkte erreicht werden. Wer mindestens einmal die Lösung einer Aufgabe vorrechnet, muss nur 40% der Gesamtpunkte erreichen.
Die Übungsblätter und weiteres Material zur Vorlesung sind auch im Internet erhältlich unter

`http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/ws03/funktionalanalysis/`

Aufgabe 1 $(8+6+4+3+3$ Punkte)
Für $1 \leq p \leq \infty$ seien s, l^p, c, c_0 wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
s &:= \{f = \{f_n\}_{n\geq 1}\,;\, f_n \in \mathbb{C}\}, \\
l^p &:= \{f \in s\,;\, \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p < \infty\} \quad (1 \leq p < \infty), \\
l^\infty &:= \{f \in s\,;\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| < \infty\}, \\
c &:= \{f \in s\,;\, \lim_{n\to\infty} f_n \text{ existiert}\}, \\
c_0 &:= \{f \in s\,;\, \lim_{n\to\infty} f_n = 0\}.
\end{aligned}$$

Weiter seien

$$\rho_p(f,g) := \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - g_n|^p\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n - g_n|, & p = \infty, \end{cases}$$

$$\rho_s(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|f_n - g_n|}{1 + |f_n - g_n|}.$$

Zeigen Sie, dass

a) $\langle s, \rho_s \rangle$, b) $\langle l^p, \rho_p \rangle$, für $1 \leq p < \infty$, c) $\langle l^\infty, \rho_\infty \rangle$, d) $\langle c, \rho_\infty \rangle$, e) $\langle c_0, \rho_\infty \rangle$

vollständige metrische Räume sind.

Hinweis: Benutzen Sie in b) (ohne Beweis) die folgende *Minkowski-Ungleichung*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} \quad (x_k, y_k \in \mathbb{C}, 1 \leq p < \infty, n \in \mathbb{N}).$$