LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. E. Görlich,

Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 15. Oktober 2003

1. Skript zur Funktionalanalysis

Definition 2 Seien $\langle X, \rho \rangle$ ein metrischer Raum und $f_0 \in X$. Für $r > 0$ heißt

$$S_r(f_0) = \{g \in X\,;\, \rho(f_0, g) < r\}$$

die **offene Kugel** mit Mittelpunkt f_0 und Radius r. Die Menge

$$\overline{S_r}(f_0) = \{g \in X;\ \rho(f_0, g) \leq r\}$$

heißt die **abgeschlossene Kugel** um f_0 mit Radius r.

Beispiele:

a) Für $X = \mathbb{R}$ und $\rho = \rho_{\text{nat}}$ ist $S_r(f_0) = (f_0 - r, f_0 + r)$ ein offenes Intervall.

b) Für $X = \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\rho = \rho_2$ gilt (vgl. Beispiel b) nach Definition 1):

$$\begin{aligned} S_r(f_0) &= \left\{ g \in \mathbb{R}^n;\ \left\{ \sum_{k=1}^{n} (f_k - g_k)^2 \right\}^{1/2} < r \right\} \qquad \begin{pmatrix} f_0 = (f_1, \ldots, f_n)^t \\ g = (g_1, \ldots, g_n)^t \end{pmatrix} \\ &= U_r(f_0) \qquad \text{(offene } r\text{-Kugel um } f_0) \end{aligned}$$

Definition 3 Seien $\langle X, \rho \rangle$ ein metrischer Raum und $A \subset X$.

(i) Ein Element $f_0 \in A$ heißt **innerer Punkt** von A, falls ein $r > 0$ existiert mit $S_r(f_0) \subset A$. Die Menge $\operatorname{int} A$ (interior) aller inneren Punkte von A heißt **das Innere** von A.

(ii) Die Menge A heißt **offen**, wenn jeder Punkt von A ein innerer Punkt von A ist.

(iii) Eine **offene Umgebung** eines Punktes $f_0 \in X$ ist eine beliebige offene Menge $U(f_0) \subset X$, die f_0 enthält.

Definition 4 Seien $\langle X, \rho \rangle$ ein metrischer Raum und $A \subset X$.

(i) Ein Punkt f_0 heißt ein **Häufungspunkt** von A, falls in jeder offenen Umgebung von f_0 mindestens ein Punkt aus A liegt, der von f_0 verschieden ist.

(ii) Die Menge A' aller Häufungspunkte von A heißt die **derivierte Menge** von A.

(iii) Die Menge A heißt **abgeschlossen**, wenn sie keinen Häufungspunkt besitzt, der außerhalb von A liegt, also wenn $A' \subset A$ gilt.

(iv) Die Menge $\overline{A} := \operatorname{cl} A := A \cup A'$ (closure) heißt die **Abschließung** oder **abgeschlossene Hülle** von A.

Regeln: Die leere Menge ist sowohl offen als auch abgeschlossen. Außerdem ist für jede Menge $A \subset X$ deren Abschluss $\overline{A}$ stets abgeschlossen, und es gilt $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$, $A \subset \overline{A}$ sowie $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ für alle $B \subset X$.

Satz 1 *Sei $\langle X, \rho \rangle$ ein metrischer Raum.*

a) Sei $A \subset X$. Dann gilt:
Ist A offen, dann ist das Komplement $\complement_X A = X \setminus A$ abgeschlossen;
Ist A abgeschlossen, dann ist das Komplement $\complement_X A$ offen.

b) Der Durchschnitt von beliebig *vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
Die Vereinigung von endlich *vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

c) Die Vereinigung von beliebig *vielen offenen Mengen ist offen.*
Der Durchschnitt von endlich *vielen offenen Mengen ist offen.*

Beweis: Analog zu Analysis I; für b) und c) vgl. Zaanen (1960), S. 9.

Bemerkung: Die jeweils zweiten Aussagen unter b) und c) können nicht auf unendlich viele Mengen ausgedehnt werden. Betrachtet man nämlich im Raum $\langle \mathbb{R}, \rho_{\text{nat}} \rangle$ für b) die Mengen $A_k = [-1 + \frac{1}{k+1}\,; 1 - \frac{1}{k+1}]$ für $k \in \mathbb{N}$, dann sind alle A_k abgeschlossen, aber deren Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (-1, 1)$ ist offen und nicht abgeschlossen. Für c) wählt man die Mengen $B_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann sind alle B_k offen, aber ihr Durchschnitt $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{0\}$ ist abgeschlossen und nicht offen. Die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen und der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen kann abgeschlossen, offen oder weder abgeschlossen noch offen sein.

Definition 5 Seien $\langle X, \rho \rangle$ ein metrischer Raum und $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Elementen $f_k \in X$.

(i) Die Folge heißt **konvergent in X gegen einen Grenzwert** f_0 mit $f_0 \in X$, falls zu jeder offenen Umgebung $U(f_0)$ eine natürliche Zahl $N = N(f_0, U)$ existiert, so dass $f_k \in U(f_0)$ für alle $k \geq N$ gilt.
Schreibweise: $\lim\limits_{k \to \infty} f_k = f_0$ oder $f_k \to f_0 \quad (k \to \infty)$ oder $f_k \xrightarrow{\rho} f_0 \quad (k \to \infty)$.

(ii) Die Folge heißt eine **Cauchy-Folge in** X, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass $\rho(f_k, f_n) < \varepsilon$ für alle $k, n \geq N$ gilt.

Bemerkung: Es gilt $\lim_{k \to \infty} f_k = f_0$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass $\rho(f_k, f_0) < \varepsilon$ für alle $k \geq N$ gilt.

Satz 2 *Sei $\langle X, \rho\rangle$ ein metrischer Raum.*

a) Gilt $\lim_{k\to\infty} f_k = f_0$ im Sinne von Definition 5(i), dann ist der Grenzwert f_0 eindeutig bestimmt.

b) Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn aus $f_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} f_k = f_0 \in X$ stets $f_0 \in A$ folgt.

c) Ein Element $f_0 \in X$ ist ein Häufungspunkt von $A \subset X$ genau dann, wenn eine Folge $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ von paarweise verschiedenen Punkten aus A existiert mit $\lim_{k\to\infty} f_k = f_0$.

d) Ist $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge und existiert eine Teilfolge, die in X gegen einen Grenzwert $f_0 \in X$ konvergiert, so konvergiert auch $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ gegen f_0.

e) Ist $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge in X, so ist sie auch eine Cauchy-Folge.

f) Es gilt $|\rho(f,h) - \rho(g,h)| \le \rho(f,g)$ für alle $f,g,h \in X$.

g) Aus $\lim_{k\to\infty} f_k = f_0$ und $\lim_{k\to\infty} g_k = g_0$ mit $f_k, g_k, f_0, g_0 \in X$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $\lim_{k\to\infty} \rho(f_k, g_k) = \rho(f_0, g_0)$.

h) Sind $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ zwei Cauchy-Folgen in X, dann ist $\{\rho(f_k, g_k)\}_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\langle \mathbb{R}, \rho_{\text{nat}}\rangle$.

Beweis-Skizze:
a) Folgt über einen indirekten Beweis unmittelbar aus Definition 5.
b) Vgl. z. B. Taylor (1963), S. 69, Thm. 2.4–A.
c), d), e) Der Beweis läuft analog zu den Aussagen in $\mathbb{R}$ (Analysis I).
f) Aus

$$\rho(f,h) \le \rho(f,g) + \rho(g,h) \qquad \text{und} \qquad \rho(g,h) \le \rho(g,f) + \rho(f,h)$$

folgt sofort

$$\rho(f,g) \ge \rho(f,h) - \rho(g,h) \ge -\rho(f,g).$$

g) Durch zweimalige Anwendung der Dreiecks-Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}\rho(f_k, g_k) &\le \rho(f_k, f_0) + \rho(f_0, g_0) + \rho(g_k, g_0),\\ \rho(f_0, g_0) &\le \rho(f_0, f_k) + \rho(f_k, g_k) + \rho(g_k, g_0).\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned}\rho(f_k, g_k) - \rho(f_0, g_0) &\le \rho(f_k, f_0) + \rho(g_k, g_0),\\ \rho(f_0, g_0) - \rho(f_k, g_k) &\le \rho(f_k, f_0) + \rho(g_k, g_0).\end{aligned}$$

Insgesamt hat man somit $|\rho(f_k, g_k) - \rho(f_0, g_0)| \le \rho(f_k, f_0) + \rho(g_k, g_0) \to 0 \quad (k \to \infty)$.
h) Unter Verwendung von Teil f) erhält man

$$\begin{aligned}|\rho(f_k, g_k) - \rho(f_n, g_n)| &\le |\rho(f_k, g_k) - \rho(g_k, f_n)| + |\rho(g_k, f_n) - \rho(f_n, g_n)|\\ &\le \rho(f_k, f_n) + \rho(g_k, g_n),\end{aligned}$$

woraus sofort die Behauptung folgt.