Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 28.11.2003

7. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 05.12.2003 vor der Übung)

Aufgabe 1: Zeigen Sie: In einem Prä-Hilbert-Raum H gilt die **Schwarz-Ungleichung**:

$$|(f,g)| \leq \sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)} \qquad (f,g \in H).$$

Es gilt genau dann Gleichheit, falls f und g linear abhängig sind, d.h. falls $g = \alpha f$ für ein $\alpha \in \Phi$ ist oder $f = 0$. $\boxed{8}$

Aufgabe 2: Sei H ein Prä-Hilbert-Raum. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Durch $\|f\|_H := \sqrt{(f,f)}$ wird auf H eine Norm definiert. $\boxed{3}$

b) Für diese Norm gilt die **Parallelogramm-Identität**:

$$\|f+g\|_H^2 + \|f-g\|_H^2 = 2\left(\|f\|_H^2 + \|g\|_H^2\right) \qquad (f,g \in H).$$ $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie:

a) Es seien Q eine beliebige, nicht-leere Menge und $l^2(Q)$ die Klasse aller komplexwertigen Funktionen f, die auf Q definiert sind und die folgende Eigenschaften haben:

(i) $\{q \in Q : f(q) \neq 0\}$ ist endlich oder abzählbar unendlich,

(ii) $\sum_{q \in Q} |f(q)|^2 < \infty$.

Definiert man auf $l^2(Q)$ ein inneres Produkt durch

$$(f,g) := \sum_{q \in Q} f(q)\,\overline{g(q)},$$

so wird $l^2(Q)$ zu einem Hilbert-Raum. Dabei sind Addition und skalare Multiplikation auf $l^2(Q)$ wie bei Funktionen üblich, d.h. punktweise, definiert.

Hinweis: Man führe die Vollständigkeit von $l^2(Q)$ auf die von $l^2(\mathbb{Z})$ zurück (auch, falls Q überabzählbar ist). $\boxed{12}$

b) Die Menge

$$P := \{(f_k)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : f_k \neq 0 \text{ höchstens endlich oft}\}$$

wird durch die Definition

$$(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, \overline{g_k}$$

mit $f = (f_k)_{n\in\mathbb{N}}, g = (g_k)_{n\in\mathbb{N}} \in P$ zu einem Prä-Hilbert-Raum, wobei Addition und skalare Multiplikation wie üblich elementweise erklärt sind. Dieser Raum ist nicht vollständig. Warum besteht kein Widerspruch zu der in Teil a) bewiesenen Vollständigkeit von $l^2(Q)$?

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := (1, 1/2, \dots, 1/n, 0, 0, \dots) \in P$. $\boxed{5}$

Aufgabe 4: Sei H Prä-Hilbert-Raum und $g := (g_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine linear unabhängige Folge in H. Nach dem Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren (vgl. Lit. B IV 5, Triebel 1972, p.86) existiert eine orthonormierte Folge $\widetilde{g} := (\widetilde{g}_k)_{k\in N_0}$ mit

$$\widetilde{g}_k := \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}\, g_j \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

und $a_{k,j} \in \mathbb{K}$ für $k, j \in \mathbb{N}_0$. In $H := L^2_\omega(-1,1)$ mit $\omega(x) := (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}$, $x \in (-1,1)$, für feste $\alpha, \beta > -1$ erhält man so aus den Monomen $g := (x^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die **orthonormierten Jacobi-Polynome** $\widetilde{g} := (\widetilde{P}_k^{(\alpha,\beta)})_{k\in\mathbb{N}_0}$. Beweisen Sie:

a) Die Menge $C[-1,1]$ ist dicht in $L^2_\omega(-1,1)$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass zu jedem $f \in L^2_\omega(-1,1)$ und $\varepsilon > 0$ ein $0 < \delta < 1$ existiert mit $\|f\|_{L^2_\omega((-1,1)\setminus I_\delta)} < \varepsilon$ für $I_\delta := [-1+\delta, 1-\delta]$. Beweisen Sie, dass $C(I_\delta)$ in $L^2(I_\delta)$ und durch geeignetes Abschätzen von ω somit auch in $L^2_\omega(I_\delta)$ dicht ist, d.h. es existiert ein $g \in C(I_\delta)$ mit $\|f - g\|_{L^2_\omega(I_\delta)} < \varepsilon$. Setzen Sie nun g auf $[-1,1]$ linear und durch Null geeignet fort, und folgern Sie so die Behauptung. $\boxed{8}$

b) Das System $(\widetilde{P}_k^{(\alpha,\beta)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Jacobi-Polynome ist fundamental in $L^2_\omega(-1,1)$.

Hinweis: Approximationssatz von Weierstrass (vgl. Lit. B IV 5, Triebel 1972, p.319) $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Sei H ein Hilbert-Raum, $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein totales Orthonormalsystem und $Y \subset H$ ein linearer Unterraum. Eine Folge $\psi := (\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in s$ heißt **Multiplikator vom Typ** (Y, H), falls für jedes $f \in Y$ ein $g \in H$ existiert mit

$$\psi_k(f, \varphi_k) = (g, \varphi_k) \qquad (k \in \mathbb{Z})\,. \tag{1}$$

Man zeige für einen Multiplikator ψ vom Typ (Y, H):

a) Zu f aus Y existiert genau ein $g \in H$, so dass (1) gilt. Infolgedessen ist der Operator $T^\psi : Y \to H$ mit $T^\psi f := g$ wohldefiniert auf Y. $\boxed{1}$

b) Zeigen Sie für $Y = H$: T^ψ ist genau dann beschränkt, wenn $\psi \in l^\infty \equiv l^\infty(\mathbb{Z})$. Falls $\psi \in l^\infty$, so gilt $\|T^\psi\|_{[H]} = \|\psi\|_{l^\infty}$. $\boxed{8}$

$\boxed{\boxed{50}}$