Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 21.11.2003

6. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 28.11.2003 vor der Übung)

Aufgabe 1: Sei $X_{2\pi}$ einer der Räume $C_{2\pi}$ oder $L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$. Für eine approximierende Identität $\{\chi_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ gelte zusätzlich

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\left[\sup_{\delta\leq|u|\leq\pi}|\chi_\rho(u)|\right] = 0\,.$$

Zeigen Sie für $f \in X_{2\pi}$:

a) In jedem Stetigkeitspunkt x_0 von f gilt $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} I_\rho(f;x_0) = f(x_0)$. $\boxed{3}$

b) Falls f stetig auf $(a-\eta, b+\eta)$ für ein $\eta > 0$ ist $(a < b)$, dann gilt $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} I_\rho(f;x) = f(x)$ gleichmäßig in $[a,b]$. $\boxed{3}$

c) Falls $\{\chi_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ zusätzlich gerade ist und $\lim\limits_{h\to 0+}[f(x_0+h)+f(x_0-h)] = 2c$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert, dann folgt $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} I_\rho(f;x_0) = c$. $\boxed{3}$

Aufgabe 2: Beweisen Sie folgende Aussagen für $r, s \in \mathbb{N}_0$:

a) Seien $f \in C^{(r)}_{2\pi}$ und $g \in L^1_{2\pi}$. Dann ist $f * g \in C^{(r)}_{2\pi}$ und $(f*g)^{(r)}(x) = (f^{(r)} * g)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{5}$

b) Für eine approximierende Identität $\{\chi_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ und $f \in C^{(r)}_{2\pi}$ gilt (**simultane Approximation**)

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|(I_\rho f)^{(k)} - f^{(k)}\|_{C_{2\pi}} = 0 \qquad (0 \leq k \leq r)\,.$$

$\boxed{3}$

c) Ist $f \in (L^p_{2\pi})^{(r)}$, so folgt $f' \in (L^p_{2\pi})^{(r-1)}$, wobei $(L^p_{2\pi})^{(0)} := L^p_{2\pi}$. $\boxed{2}$

d) Für $1 < p\,, q < \infty$ mit $1/p + 1/p' = 1$ seien $f \in (L^p_{2\pi})^{(r)}$ und $g \in (L^{p'}_{2\pi})^{(s)}$. Dann folgt $f * g \in C^{(r+s)}_{2\pi}$ und $(f*g)^{(r+s)}(x) = (f^{(r)} * g^{(s)})(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Zeigen Sie:

a) Ist $f \in AC[a,b]$, so existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für jede Wahl von disjunkten Teilintervallen $[a_i, b_i] \subset [a,b]$, $i \in I \subset \mathbb{N}$, gilt:

$$\sum_{i\in I} (b_i - a_i) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i\in I} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Hinweis: Verwenden Sie die absolute Stetigkeit des Lebesgue-Integrals (vgl. Lit. B III 1 (Hewitt-Stromberg), p.286). $\boxed{3}$

b) Für $b - a < \infty$ gilt:

$$AC[a,b] \subset BV[a,b]\,.$$ $\boxed{3}$

Definition: *Sei $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$. Falls ein $g \in L^p_{2\pi}$ existiert, so dass*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right\|_{L^p_{2\pi}} = 0\,,$$

so heißt g die **starke Ableitung** *$D^1_s f$ von f. Höhere starke Ableitungen $D^r_s f$ werden iterativ definiert über $D^{r+1}_s f := D^1_s(D^r_s f)$.*

Aufgabe 4: Zeigen Sie für $r \in \mathbb{N}_0$:

a) Ist $f \in (L^p_{2\pi})^{(r)}$, $1 \le p < \infty$, dann existiert die r-te starke Ableitung (in $L^p_{2\pi}$) von f mit $D^r_s f = f^{(r)}$. $\boxed{4}$

b) Ist $f \in (L^p_{2\pi})^{(r)}$, $1 \le p < \infty$, und $g \in L^1_{2\pi}$, dann ist die Faltung $f * g$ r-fach stark differenzierbar mit $(D^r_s f) * g = D^r_s(f * g)$. $\boxed{3}$

Hinweis: Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), p.34

$\boxed{\boxed{35}}$