Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 14.11.2003

5. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 21.11.2003 vor der Übung)

Aufgabe 1: Es sei f gegeben durch $f(x) := x(2\pi - x)$, $0 \le x < 2\pi$ und 2π-periodisch fortgesetzt. Zeigen Sie mittels Folgerung 2.32, dass

$$\lim_{m\to\infty} S_m(f;0) = f(0)\,,$$

und folgern Sie hieraus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

$\boxed{5}$

Aufgabe 2: Beweisen Sie:

a) Ist $f \in L^1_{2\pi}$ mit

$$\int_0^{\pi} \omega(t,f;L^1_{2\pi})\frac{dt}{t} < \infty\,,$$

dann gilt:

$$\lim_{m\to\infty} S_m(f;x) = f(x) \quad f.\ddot{u}.$$

Hinweis: Benutzen Sie das Dini-Kriterium für $\delta = \pi$. $\boxed{4}$

b) Ist $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; L^1_{2\pi})$ für ein $\alpha > 0$, dann gilt (vgl. Folgerung 2.32): $\lim_{m\to\infty} S_m(f;x) = f(x) \quad f.\ddot{u}.$ $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie das **Gibbs-Phänomen**: Für den Bernoulli-Spline f_2 aus Übung 1, Aufgabe 5b) und $x_m := \frac{\pi}{m}$, $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{m\to\infty} S_m(f_2;x_m) - f_2(x_m) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{\pi}{2} > 0\,.$$

$\boxed{3}$

Aufgabe 4: Die **de La Vallée Poussin-Summen** (de La Vallée Poussin: 1866–1962) einer Funktion $f \in L^1_{2\pi}$ sind definiert durch das singuläre Integral

$$V_{m,\mu}(f;x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)v_{m,\mu}(u)du \qquad (0 \le m \le \mu \in \mathbb{N})$$

mit Kern

$$v_{m,\mu}(u) := \frac{\mu+1}{\mu+1-m}F_\mu(u) - \frac{m}{\mu+1-m}F_{m-1}(u)\,,$$

wobei F_m der Fejér-Kern ist und $F_{-1} := 0$ gesetzt wird.

a) Bestimmen Sie die Faktoren $\Theta_{k,m,\mu}$ in der Darstellung

$$v_{m,\mu}(u) = \sum_{k=-\mu}^{\mu} \Theta_{k,m,\mu} e^{iku}\,.$$

$\boxed{3}$

b) Zeigen Sie für festes $j \in \mathbb{N}_0$: $\|V_{\mu-j,\mu}\|_{[L^1_{2\pi}]} \neq \mathcal{O}(1) \quad (\mu \to \infty)$.

Hinweis: Sei Λ eine komplexe, unendlich dimensionale Dreiecksmatrix, d.h. $\Lambda := (\lambda_{k,m})_{k,m\in\mathbb{N}_0}$ mit $\lambda_{k,m} \in \mathbb{C}$, wobei $\lambda_{k,m} := 0$ für $m < k$ ist. Für $f \in L^1_{2\pi}$ sei $\Lambda_m f := f * \chi_m$, $m \in \mathbb{N}_0$, mit

$$\chi_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} \lambda_{|k|,m} e^{ikx}.$$

Für $X_{2\pi} = C_{2\pi}$ oder $L^1_{2\pi}$ gilt die **Ungleichung von Hardy-Littlewood-Sidon**, d.h. es existiert eine Konstante $M > 0$ mit

$$\|\Lambda_m\|_{[X_{2\pi}]} \geq M \cdot \Big| \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{k,m}}{m+1-k} \Big| \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$\boxed{4}$

Aufgabe 5: Für eine reellwertige Funktion $f \in L^1_{2\pi}$ und $c \in \mathbb{R}$ sei $F_c(x) := \int_c^x f(t)\,dt$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass ein $c_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so das $\int_{-\pi}^{\pi} F_{c_0}(x)\,dx = 0$. $\boxed{4}$

Aufgabe 6: Die **Euler-Splines** $\varphi_{n,m}$ sind für $n, m \in \mathbb{N}$ und $\gamma_{n,m} := (1-(-1)^m)\frac{\pi}{4n}$ durch

$$\varphi_{n,0}(t) := \operatorname{sgn}(\sin nt), \qquad \varphi_{n,m}(t) := \int_{\gamma_{n,m}}^{t} \varphi_{n,m-1}(u)\,du$$

definiert (vgl. Übung 1, Aufgabe 5a)). Zeigen Sie, dass die Euler-Splines 2π-periodische Funktionen sind und die folgenden Entwicklungen gelten

$$\varphi_{n,m}(t) = \frac{4}{\pi n^m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)nt - \frac{\pi m}{2}\right]}{(2\nu+1)^{m+1}} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: Benutzen Sie Satz 2.74 der Vorlesung. $\boxed{9}$

Aufgabe 7: Zeigen Sie als Anwendung von Aufgabe 6:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

$\boxed{6}$

Aufgabe 8: Sei $\sum a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ eine unendliche Reihe, und seien $s_m := \sum_{|k|\leq m} a_k$, $m \in \mathbb{N}_0$, ihre symmetrischen Partialsummen. Man zeige:

a) Ist die Reihe (symmetrisch) konvergent gegen a, d.h. $\lim_{m\to\infty} s_m = a$, dann ist sie auch $(C,1)$-summierbar gegen a. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. $\boxed{3}$

b) Es gilt: $$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) a_k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$
Folgern Sie hieraus, dass die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in C_{2\pi}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ entweder divergiert oder gegen $f(x_0)$ konvergiert. $\boxed{2}$

c) Ist die Reihe $(C,1)$-summierbar gegen a und gilt $\lim_{k\to\pm\infty} k\,a_k = 0$, dann ist die Reihe auch (symmetrisch) konvergent gegen a. $\boxed{1}$

$\boxed{\boxed{46}}$