Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 23.01.2004

13. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 30.01.2004 vor der Übung)

Aufgabe 1: Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass $g\hat{\ } \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie (vgl. Übung 3, Aufgabe 2d)):

a) $(f * g)(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{\ }(v) g\hat{\ }(v) e^{ixv}\, dv \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$,

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\overline{g(u)} du = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{\ }(u)\, \overline{g\hat{\ }(u)}\, du$.

c) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass $f\hat{\ } \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so sind $f, f\hat{\ } \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f\hat{\ }\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

$\boxed{6}$

Aufgabe 2: Seien $f \in (L^1(\mathbb{R}))^{(r)}$ und $g \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann die Faltung $f * g \in (L^1(\mathbb{R}))^{(r)}$ ist mit (vgl. Übung 6, Aufgaben 2,4)

$$(f * g)^{(r)}(x) = (f^{(r)} * g)(x) \qquad \text{f. ü.}$$

$\boxed{6}$

Aufgabe 3: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, so dass $x\, f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann $f\hat{\ }(v)$ punktweise und in der Norm des Raumes $C_0(\mathbb{R})$ (nach v) differenzierbar ist mit

$$(f\hat{\ })'(v) \;=\; [\,(-ix)\, f(x)\,]\hat{\ }(v) \qquad (v \in \mathbb{R})\,.$$

$\boxed{6}$

Definition: *Eine Funktion* $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ *heißt* **quasikonvex**, *falls* $f \in AC_{loc}(0, \infty)$ *und* $f' \in BV_{loc}(0, \infty)$, *so dass (Riemann-Stieltjes-Integrale)*

$$\int_0^\infty u|d\, f'(u)| := \lim_{\varepsilon \to 0+,\, \rho \to \infty} \int_\varepsilon^\rho u|d\, f'(u)| := \lim_{\varepsilon \to 0+,\, \rho \to \infty} \int_\varepsilon^\rho u\, d[\mathit{Var}\, f']_\varepsilon^u < \infty.$$

Dabei ist (vgl. Definition 4.32)

$$AC_{loc}(0,\infty) := \Big\{ \varphi \in C(0,\infty) : \exists\, g \in L^1_{loc}(0,\infty) \textit{ und } \alpha \in \mathbb{C}, \textit{ so dass}$$
$$\varphi(x) = \alpha + \int_1^x g(u)du \quad \forall\, x \in (0,\infty) \Big\},$$
$$L^1_{loc}(0,\infty) := \{ g : (0,\infty) \to \overline{\mathbb{C}} \textit{ messbar und } \int_a^b |g(u)|du < \infty \quad \forall\, [a,b] \subset (0,\infty) \},$$

und $BV_{loc}(0,\infty)$ ist analog definiert (vgl. Definition von $BV_{loc}(\mathbb{R})$ in Übung 12).

Aufgabe 4: Sei $f \in C[0,\infty)$ quasikonvex und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie:

a) $\lim_{\rho\to\infty} \rho |f'(\rho)| = 0$,

b) $\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^2 |f'(\varepsilon)| = 0$.

c) Ist f zusätzlich konvex, d.h.

$$f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) \;\le\; \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y) \qquad (x, y \in [0,\infty),\ \lambda \in [0,1]\,),$$

so folgt, dass f' monoton wachsend ist.

Hinweis: Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), p. 248 $\boxed{5}$

Aufgabe 5: Sei $f \in C_0(\mathbb{R})$ gerade und quasikonvex (auf $(0,\infty)$). Beweisen Sie, dass eine gerade Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ existiert mit $g^\wedge(v) = f(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Dabei hat g für $x \neq 0$ die Darstellung

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \frac{xu}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 d\, f'(u)\,.$$

Ist f zusätzlich konvex, so ist g positiv.
Hinweis: Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), pp. 251-252 $\boxed{13}$

Aufgabe 6: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: Ist $f^\wedge$ nicht negativ, so gilt:

$$f^\wedge \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Cesàro-Faktor aus Übung 9, Aufgabe 2b). $\boxed{4}$

$\boxed{\boxed{40}}$