Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 09.01.2004

11. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 16.01.2004 vor der Übung)

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie für den in Übung 9, Aufgabe 2b) eingeführten Cesàro-Faktor Θ^C:

$$\left[(\Theta^C)\hat{}(\,\cdot\,)\right]\hat{}(s) = 2\pi\,\Theta^C(s).$$

$\boxed{3}$

b) Zeigen Sie unter Verwendung von Übung 9, Aufgabe 2b) und Teil a), dass zu gegebenen reellen Zahlen $a < b$ und $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ existiert mit

$$g\hat{}(t) = \begin{cases} 1\,, & a \le t \le b \\ 0\,, & t \le a - \varepsilon \text{ oder } t \ge b + \varepsilon \\ \text{linear}\,, & \text{auf } [a-\varepsilon, a] \text{ und } [b, b+\varepsilon] \end{cases} \quad .$$

$\boxed{6}$

Hinweis: Lit. A II 1 (Goldberg), pp. 21-24

Aufgabe 2:

a) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g\hat{}(v) = 0$ für $|v| \ge 1$. Zeigen Sie, dass $(f * g)\hat{}(v) = 0$ ist für $|v| \ge 1$ (vgl. Lemma 2.7 d)). $\boxed{1}$

b) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $f(x) = 0$ für $|x| \ge a$ und $g(x) = 0$ für $|x| \ge b$. Zeigen Sie, dass dann $(f * g)(x) = 0$ ist für $|x| \ge a + b$. $\boxed{2}$

c) Zeigen Sie, dass Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ existieren mit $f(x) \ne 0$, $g(x) \ne 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$(f * g)\hat{}(v) = 0 \quad (v \in \mathbb{R})\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $f(x) := (\Theta^C)\hat{}(x) + (\Theta^C)\hat{}(x + \pi)$ und $g(x) = e^{-2ix}\,f(x)$. $\boxed{5}$

Aufgabe 3: Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} (-\Delta c_k) \log k < \infty.$$

Hinweis: Benutzen Sie Abel'sche partielle Summation und (mit Herleitung) die Abschätzung

$$\log m \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \leq 2 \log m \qquad (m \in \mathbb{N}, m \geq 3)\,.$$

$\boxed{7}$

Aufgabe 4: Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine ungerade (d.h. $c_k = -c_{-k}$) Folge von reellen Zahlen mit $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq 0$ und $\lim_{|k|\to\infty} c_k = 0$. Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ ist Fourier-Reihe einer Funktion $g \in L^1_{2\pi}$ genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-\Delta c_k) \log k < \infty\,.$$

Hinweis: Vgl. Lit. A II 4 (Edwards I), pp. 115-116 $\boxed{10}$

Aufgabe 5: Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\log k}$ ist die Fourier-Reihe einer Funktion aus $L^1_{2\pi}$. $\boxed{4}$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}$ ist nicht die Fourier-Reihe einer Funktion aus $L^1_{2\pi}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 6: Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine gerade, beschränkte Folge, so dass $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ **konvex** ist, d.h., $\Delta^2 c_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie:

  (i) $\Delta c_k \leq 0 \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$,

  (ii) $\lim_{k\to\infty} k\Delta c_k = 0$,

  (iii) $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist quasikonvex. $\boxed{6}$

b) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ zusätzlich eine Nullfolge. Beweisen Sie, dass dann eine gerade, positive Funktion $g \in L^1_{2\pi}$ existiert mit $g\hat{\ }(k) = c_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{2}$

$\boxed{\boxed{48}}$