Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532

Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 19.12.2003

10. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 09.01.2004 vor der Übung)

Aufgabe 1: Betrachten Sie das **Fourier'sche Ringproblem** (aus der Einleitung der Vorlesung): Sei $f \in X_{2\pi}$. Bestimmen Sie eine Funktion $u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$, die 2π-periodisch in x ist und die folgenden Bedingungen erfüllt:

i) $\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$ existieren für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

ii) u genügt der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial\, u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\, u(x,t)}{\partial x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

iii) $\lim_{t\to 0+} \|u(\cdot,t) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0$.

iv) $u(\cdot,t) \in X_{2\pi}^{(2)}$ für alle $t > 0$.

v) $\frac{\partial}{\partial t} u(\cdot,t) \in X_{2\pi}$ für alle $t > 0$, und es gilt:

$$\lim_{h\to 0+} \left\| \frac{u(\,\cdot\,,t+h) - u(\,\cdot\,,t)}{h} - \frac{\partial\, u(\,\cdot\,,t)}{\partial t} \right\|_{X_{2\pi}} = 0\,.$$

Hinweis: Wenden Sie unter der Annahme der Existenz einer Lösung u die Fourier-Transformation auf die Dgl aus ii) an. Lösen Sie die erhaltenen gewöhnlichen Dgl'en und transformieren Sie diese zurück. Verifizieren Sie schließlich die geforderten Eigenschaften für den so erhaltenen Kandidaten; benutzen Sie hierbei für iii) die Poisson-Summenformel. $\boxed{12}$

Definition: *Eine Familie $(c_k(\rho))_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\rho \in \mathbb{A}$, quasikonvexer Folgen (vgl. Definition in Übung 9) heißt* **gleichgradig quasikonvex**, *falls eine von ρ unabhängige Konstante $M < \infty$ existiert, so dass*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)|\Delta^2 c_k(\rho)| \le M \qquad (\rho \in \mathbb{A})\,.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie:

a) Sei $(c_k(\rho))_{k\in\mathbb{Z}}$, $\rho \in \mathbb{A}$, eine Familie von geraden Folgen, so dass $(c_k(\rho))_{k\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig quasikonvex und gleichgradig beschränkt ist. Gilt zudem $\lim_{k\to\infty} c_k(\rho) = 0$

für jedes $\rho \in \mathbb{A}$, dann existieren eine Konstante $M < \infty$ und zu jedem $\rho \in \mathbb{A}$ eine gerade Funktion $g_\rho \in L^1_{2\pi}$ derart, dass

$$\begin{aligned} (g_\rho)\hat{}(k) &= c_k(\rho) \qquad (k \in \mathbb{Z},\ \rho \in \mathbb{A}), \\ \|g_\rho\|_{L^1_{2\pi}} &\leq M \qquad (\rho \in \mathbb{A}). \end{aligned}$$

Hinweis: Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), pp.249–250 $\boxed{8}$

b) Sei $\{\chi_t\}_{t>0}$ der (periodische) Gauß-Weierstraß-Kern und $W_t f := f * \chi_t,\ f \in X_{2\pi}$, das zugehörige Faltungsintegral, dann gilt:

$$\lim_{t \to 0+} \|W_t f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \quad (f \in X_{2\pi}).$$

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage mittels Teil a) und dem Satz von Banach-Steinhaus (vgl. Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), p.19). Verifizieren Sie die gleichgradige Quasikonvexität der Fourier-Transformierten des Kerns mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes. $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass eine gerade Funktion $\varphi_\alpha \in L^1_{2\pi}$ existiert mit $(\varphi_\alpha)\hat{}(k) = |k|^{-\alpha}$ für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq 0$. $\boxed{5}$

Aufgabe 4:

a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie für das Analogon zur Partialsumme

$$S_R(f;x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} f\hat{}(t)\, e^{ixt}\, dt$$

die Darstellung

$$S_R(f;x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, \frac{\sin Rt}{t}\, dt\,.$$

$\boxed{3}$

b) Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$, und es gebe Zahlen $c \in \mathbb{C}$ und $\delta > 0$, so dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\delta [\, f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2c\,]\, \frac{\sin Rt}{t} dt = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $\lim_{R\to\infty} S_R(f;x_0) = c$ gilt (vgl. Satz 2.25). $\boxed{7}$

c) Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f \in BV[x_0-\delta, x_0+\delta]$ für ein $\delta > 0$. Man beweise, dass (vgl. Folgerung 2.36)

$$\lim_{R\to\infty} S_R(f;x_0) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}\,.$$

$\boxed{10}$

Hinweis: Lit. A II 19 (Chandrasekharan), pp.25–30

$\boxed{\boxed{49}}$