LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 9. Dezember 2003

9. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 16. 12. 2003, bis 16:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Aufgabe 28 (Lipschitzabbildungen)

a) Es sei $\tilde{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \mapsto f(x,t)$ stetig und lokale Lipschitzabbildung bzgl. x.

Zeige: Ist $\tilde{K} \subset \tilde{U}$ kompakt, so gibt es ein $L > 0$ mit $||f(t,x) - f(t,\tilde{x})|| \leq L \cdot ||x - \tilde{x}||$ für alle $(t,x),(t,\tilde{x}) \in \tilde{K}$.

Tip: Zeige erst: Ist $\vartheta > 0$, so existiert ein L_1, mit $||f(t,x) - f(t,\tilde{x})|| \leq L_1 \cdot ||x - \tilde{x}||$ für alle (t,x), $(t,\tilde{x})$ in $\tilde{K}$ mit $||x - \tilde{x}|| \geq \vartheta$

b) Zeige allein mit (2.2.6) und (2.2.7), ohne (2.2.8), für autonome Gleichungen

$$\dot{x} = f(x)$$

auf $U \subset \mathbb{R}^n$ mit lokaler Lipschitzabbildung f: Ist $y^* \in U$, $t^* \in \mathbb{R}$ und J ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ mit $t^* \in J$ so, dass $S(t,y^*)$ für alle $t \in J$ existiert, so existiert eine kompakte Umgebung K von y^* in U und ein $M > 0$ so, dass $S(t,y)$ für alle $y \in K$ und $t \in J$ existiert und

$$||S(t,y) - S(t,y^*)|| \leq M \cdot ||y - y^*||$$

gilt.

Aufgabe 29

a) Es sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_1^3 - x_1 \cdot x_2^2 \\ x_1 + x_2 - x_1^2 \cdot x_2 - x_2^3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben. Wandeln Sie die Differentialgleichung in eine Differentialgleichung in Polarkoordinaten um, lösen Sie sie und beschreiben Sie das Verhalten der Lösungen.

b) Volterra-Lotka (vgl. 2.3.5): Es sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 \cdot (a - b \cdot x_2) \\ \dot{x_2} &= x_2 \cdot (c \cdot x_1 - d) \end{aligned} \tag{2}$$

mit positiven a, b, c, d gegeben. Finden Sie eine implizite Beschreibung der Lösungen der Bahnengleichung

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2 \cdot (c \cdot x_1 - d)}{x_1 \cdot (a - b \cdot x_2)} \tag{3}$$

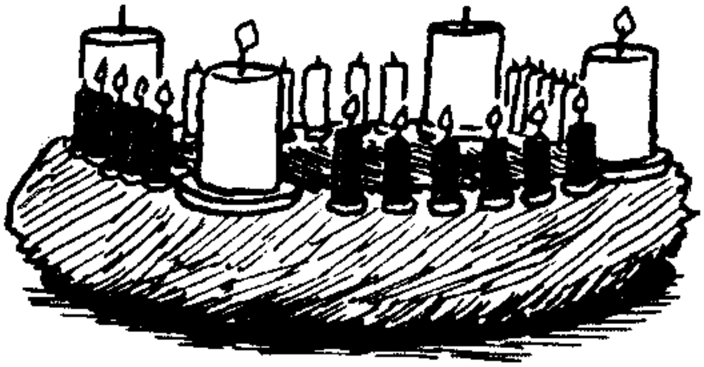
der Form $\psi(x_1,x_2) =$konstant. Zeigen Sie: ψ ist ein erstes Integral.

Aufgabe 30 (Maple: Chemostat) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x}_1 = r - \frac{ax_1}{c+x_1}x_2 - \delta_1 x_1 \tag{4}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{bx_1}{c+x_1}x_2 - \delta_2 x_2 \tag{5}$$

mit positiven Zahlen r, a, b, c, δ_1 und δ_2. Versuchen Sie durch Variation der Parameter und Ausgabe des Phasenraumportraits das Verhalten von Lösungen im ersten Quadranten abhängig von den Parametern abzuschätzen. Es kann hilfreich sein, Maple die Position der stationären Punkte (liegen sie im ersten Quadranten?) berechnen zu lassen.



Frohen Advent! [1]

[1] Skizze des 1839 in Hamburg von Johann Hinrich Wichern (1808-1881) sozusagen erfundenen ersten Adventskranzes. Vgl. http://www.martinsgemeinde.de/liturgie_nachgefragt.htm