LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 25. November 2003

8. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 2. 12. 2003, bis 15:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Aufgabe 25 (Lineare autonome (in-)homogene Differentialgleichungen) Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + r(t) \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ und $t \in \mathbb{R}$.

a) Führen Sie für $r \equiv 0$ die Gleichung auf eine Gleichung mit rechter oberer Dreiecksmatrix zurück. Zeigen Sie weiter: Die Lösungen haben im Fall einer oberen Dreiecksmatrix A die Form

$$\left(c_1 \cdot e^{a_1 t} + p_{1,2}(t) \cdot e^{a_2 t} + \cdots + p_{1,n}(t) \cdot e^{a_n t}, \ldots, c_{n-1} \cdot e^{a_{n-1} t} + p_{n-1,n}(t) \cdot e^{a_n t} + c_n \cdot e^{a_n t}\right)^{tr}$$

mit Polynomen $p_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $c_j \in \mathbb{C}$ und den Diagonaleinträgen $a_j = A_{j,j}$ der Matrix A. Welche Gestalt haben dann die Lösungen im nicht-diagonalen Fall?

b) Sei nun $r(t) = q_1(t)e^{\alpha_1 t} + \cdots + q_k(t)e^{\alpha_k t}$ mit vektorwertigen Polynomen $q_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$. Lösen Sie mit Hilfe von Teil a) und Aufgabe 23 a) die Gleichung (1): Welche Gestalt haben die Lösungen?

c) Konkret sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } r \equiv 0$$

gegeben. Welche Lösung hat (1) in Abhängigkeit von $x_0 = x(0)$?

Aufgabe 26 Zeigen Sie:

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\tilde{U}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Ist $f : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ für alle t in $\left\{t \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in \tilde{U}\right\}$ stetig partiell differenzierbar nach x, so ist f eine lokal Lipschitz-abbildung.

b) Definiere $\gamma(t) := sin(t^2)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist γ die Lösung einer autonomen Differentialgleichung[1] $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}$?

c) Definiere für $t \in]-\infty, 1[$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{1-t} \\ \cos t \end{pmatrix} .$$

Ist $\gamma :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}^2$ Lösung einer autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^2$?

[1] Wir betrachten nur Differentialgleichungen mit lokal Lipschitz-stetiger rechter Seite.

Aufgabe 27 (Eigentlich keine Maple Aufgabe) Betrachten Sie die Differentialgleichungen

$$y' = \frac{\cos y}{\sin x} \tag{2}$$

$$\dot{x} = x^2 + 1 \tag{3}$$

$$\dot{x} = x^2 - 1 \tag{4}$$

$$\dot{x} = x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = y, \quad K, y > 0 \tag{5}$$

wobei $y' = \frac{dy}{dx}(x)$ bedeutet. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen. Sollten Sie die Lösungen warum auch immer in elektronischer Form vorliegen haben, können Sie sie mir auch per E-Post senden, jedoch erklären Sie dann bitte, welche Parameter vom Anfangswert abhängen.

Hinweis: Für das letzte Blatt wurde eine Datei mit Beispielen zur Behandlung von Differentialgleichungen ins Netz gestellt. Die dort verwendeten Befehle könnten auch diesmal wieder hilfreich sein.

Frohen Advent!