LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 25. November 2003

7. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 2. 12. 2003, bis 15:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Aufgabe 22 Es sei die reelle Differenzengleichung $x(t+1) = f(x(t))$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ \rho x_1 e^{-x_1} \end{pmatrix}$$

zu den Parametern $0 < \alpha \leq 1$ und $0 < \rho$ gegeben.

a) Zeigen Sie: Der erste Quadrant ist positiv invariant. Deshalb schränken wir unsere Betrachtung auf diesen Quadranten (inklusive Rand) ein.

b) Zeigen Sie: Falls es positive μ_1, μ_2 gibt mit

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} > \rho \text{ und } \frac{\mu_2}{\mu_1} > \alpha \,,$$

so ist $\varphi := \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ eine Ljapunov-Funktion. Für welche α, ρ gibt es solche μ_1, μ_2? Welche Limesmenge hat die Differenzengleichung in diesem Fall? Welches Langzeitverhalten?

c) Berechnen Sie die stationären Punkte in Abhängigkeit von α und ρ.

d) Geben Sie die Stabilität der berechneten stationären Punkte in fast allen Fällen an.

Aufgabe 23 (Differentialgleichungen) a) Zeigen Sie für λ, α_j in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und Polynome p_j: Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \lambda x + p_1(t)e^{\alpha_1 t} + \cdots + p_r(t)e^{\alpha_r t}$$

hat eine Lösung der Form $x(t) = ce^{\lambda t} + q_1(t)e^{\alpha_1 t} + \cdots + q_r(t)e^{\alpha_r t}$ mit Polynomen q_j. Welche Parameter sind dabei fest, welche hängen vom Anfangswert ab?

b) Lösen Sie das reelle Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \quad , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Methoden der Analysis.

Aufgabe 24 (Maple-ODEs) Auf der Internet-Seite der Übungen finden Sie eine Datei mit Beispielen zur Behandlung von Differentialgleichungen mit Maple. Laden Sie diese Datei mit Maple und führen Sie die Befehle der Reihe nach aus. Sie sollen dabei erst einmal einen Überblick über die vorhandenen Befehle gewinnen.[1] Betrachten Sie folgende Differentialgleichung für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $b \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)(1 - y(t)) - bx(t)^2 \\ \dot{y}(t) &= \frac{3}{10} y(t)(x(t) - 1) \end{aligned}$$

Das ist (insbesondere für $b = 0$) ein bekanntes Räuber-Beute-Modell, dass die Populationsentwicklung für die Beute x und die Räuber y beschreibt.

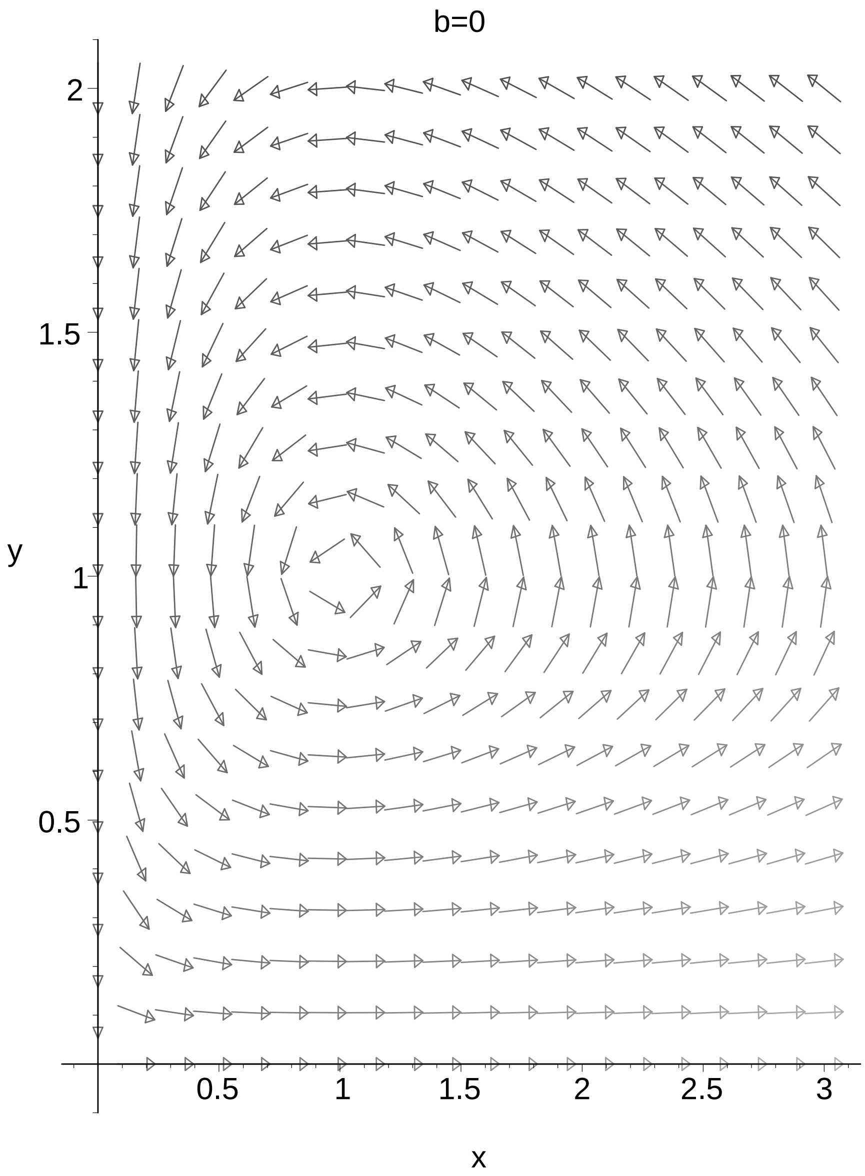
[1] Sie müssen nicht zu sehr ins Detail gehen und sich gleich alle Parameter ansehen. Für die schließlich verwendete Methode wird dies jedoch unerläßlich sein.

a) Erstellen Sie für die Werte $b = 0$, $b = 1/20$ und $b = 1/5$ mit Maple ein Phasenraumportrait (vgl. Zeichnung) des Bereichs $x \in [0,3]$, $y \in [0,2]$ und zeichnen Sie die Lösung mit Startbedingung $x(0) = y(0) = 1/2$ für Werte $t \in [0,50]$ ein. Bei Problemen hilft Ihnen vielleicht Aufgabenteil c)

b) Welchen Unterschied erkennen Sie zwischen den Situationen für $b = 0$ und für $b > 0$? Deuten Sie die Ergebnisse.

c) Wählen Sie für $b = 0$ und das Anfangswertproblem $x(0) = y(0) = 1/2$ die Option stepsize=1 und bei einem zweiten Versuch stepsize=1/10. Was ist der beobachtete Unterschied? Welche Schrittweite wird hier wohl gesetzt? Was passiert, wenn Sie auf diese Option verzichten?

Schicken Sie ihre Maple-files an die übliche E-Post-Adresse.[2]



[2]Um ihre Ressourcen zu schonen können Sie auch eine Version ohne Bilder schicken, ich führe dann die Befehle in Ihrer Datei nach einander aus.