LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 18. November 2003

6. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 25. 11. 2003, bis 15:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Aufgabe 19 (Potenzen am Einheitskreis) Bezeichne mit $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ den komplexen Einheitskreis.

a) Für eine ganze Zahl $p \geq 2$ sei $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ durch $f(z) = z^p$ gegeben. Erinnern Sie sich an die Behandlung der Quadratabbildung in der Vorlesung. Wie kann man nun für $p \geq 2$ das Vorgehen verallgemeinern? Gibt es eine passende Shiftabbildung wie im Spezialfall $p = 2$? Zeigen Sie etwa die Existenz von periodischen Punkten zu jeder genauen Periode $q \in \mathbb{N}$.

b) Sie kennen nun schon die Abbildungen $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f(z) = z^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(z) = 4z(1-z)$. Wie hängen die Lösungen von $x(t+1) = f(x(t))$ und $y(t+1) = g(y(t))$ zusammen? Zeigen Sie den Zusammenhang sowohl anhand der Lösungen als auch anhand der definierenden Gleichungen.

Aufgabe 20 a) Die logistische Gleichung $x(t+1) = f(x(t)) = 4x(t)(1-x(t))$ für $r = 4$ hat Lösungen der Form $\left(\sin^2(2^t\pi\alpha)\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$.

i) Finde v, so dass die Omega-Limesmenge $\omega(v)$ von v ein Dreierzyklus ist, d.h. dass es ein z^* gibt mit $\omega(v) = \left\{z^*, f(z^*), f^2(z^*)\right\}$ und $z^* \neq f(z^*) \neq f^2(z^*) \neq z^*$.

ii) Sei nun $v =: \sin^2(\pi\alpha) = (\sin^2\pi\sum_{k\geq 1} d_k 2^{-k})$ mit v aus Teil i). Schreibt man

$$\alpha = \sum_{m\geq 1} (4\cdot d_{3m-2} + 2\cdot d_{3m-1} + d_{3m})\cdot 2^{-3m}$$

so sieht man, dass die $(d_{3m-2}, d_{3m-1}, d_{3m})$ Dreierblöcke bilden. Setze

$$\begin{pmatrix}\tilde{d}_{3m-2}\\ \tilde{d}_{3m-1}\\ \tilde{d}_{3m}\end{pmatrix} \begin{cases} = \begin{pmatrix}d_{3m-2}\\ d_{3m-1}\\ d_{3m}\end{pmatrix} & \text{falls } m \text{ keine Quadratzahl ist.}\\[2ex] \neq \begin{pmatrix}d_{3m-2}\\ d_{3m-1}\\ d_{3m}\end{pmatrix}, \text{ beliebig} & \text{falls } m \text{ Quadratzahl ist.}\end{cases}$$

Ändere also genau die Dreierblöcke zu allen Quadratzahlen m ab[1] und setze $\tilde{\alpha} = \sum_{k\geq 1} \tilde{d}_k 2^{-k}$ sowie $\tilde{v} := sin^2(\pi\tilde{\alpha})$.

1. Ist $\omega(v) \subset \omega(\tilde{v})$?
2. Gilt $\omega(v) \supset \omega(\tilde{v})$?

b) Es sei $(x(t))_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Lösung einer autonomen Differenzengleichung $x(t+1) = f(x(t))$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ für ein $n \geq 1$, wobei $x(0) = v$. Beweisen Sie für die Omega-Limesmenge:

$$\omega(v) = \bigcap_{t\geq 0} C(t) \text{ mit } C(t) = \overline{\{f^s(v) : s \geq t\}}$$

Hinweis: Zeigen Sie: y in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist Häufungspunkt einer Folge $(f^k(v))_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle natürlichen t ein $t^* > t$ existiert, so dass $|y - f^{t^*}(v)| < \varepsilon$ gilt.

[1] Unter Beibehaltung von $\tilde{d}_k \in \{0,1\}$.

Aufgabe 21 (Maple: Iteration der Zeltabbildung) Wir betrachten die Zeltabbildung

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{falls } x < 1/2\,, \\ 2(1-x) & \text{falls } x \geq 1/2\,. \end{cases}$$

auf dem Intervall $[0,1]$.

a) Programmieren Sie die Zeltabbildung als Prozedur (proc) in Maple, ignorieren Sie dabei den Definitionsbereich.

b) Programmieren Sie die Zeltabbildung, jedoch ohne den if-Befehl. Verwenden Sie dazu den Betrag abs(x)=$|x|$.

c) Geben Sie ein Bild der Zeltabbildung aus.

d) Lassen Sie Maple den Graphen von f^7 im Bereich $[0,1]$ zeichnen.

e) Finden Sie mit Maple die Punkte mit genauer Periode 7 (im Intervall [0,1]).

Schicken Sie Ihr Programm bitte per E-Post an die Adresse sebastian.mayer@matha.rwth-aachen.de.

Beispielhafte Sammlung von Maple-Befehlen

> abs(x); #Gibt den Betrag $|x|$ von x zurück.

> apply(f,y); #Das ist äquivalent dazu, f(y) zu schreiben.

> Funktionsname:='f'; apply(Funktionsname, y); #Auf diese Weise kann man eine Variable haben, die den Namen einer Prozedur enthält, und anhand dieses Names die Prozedur benützen.

> plot(f,0..1); #Dieser Befehl gibt eine Zeichnung des Graphen von f im Definitionsbereich $[0,1]$ aus. Dazu muss f eine Prozedur in einer reellen Variable mit reellem Bild sein: f:=proc(x) … return eval(x) end:

> # Wenn Sie wollen, so können Sie sich auch an dem folgenden Konstrukt versuchen:

> Metafunktion:=proc(r) return proc(x) return r*x*(1-x);end; end;

> #Was macht diese Funktion wohl? Tippen Sie obige Funktion ein und probieren Sie dann die Zuweisung:

> f:=Metafunktion(4); y:=f(3/4); Metafunktion(3)(x);

Hinweis: Falls Sie sich an der Prozedur „Metafunktion" versuchen, was Sie **nicht** müssen, könnte folgende mathematische Definition der zugehörigen Abbildung nützlich sein:

$$\text{Metafunktion} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Abbildung}\} \\ r & \longmapsto & f_r : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & r \cdot x \cdot (1-x) \end{cases} \end{cases}$$

Dieses Konstrukt ist natürlich für eine andere Aufgabe, aber vielleicht können Sie es ja anpassen.