LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 4. November 2003

4. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 11. 11. 2003, bis 15:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Hinweis:

Am 11. 11. findet um 18 Uhr ein didaktischer Vortrag von Prof. Dr. Peter Baptist, Universität Bayreuth, zum Thema „Dynamische Arbeitsblätter im Mathematikunterricht — ein Weg zum eigenständigen Lernen." im Hörsaal III des Hauptgebäudes statt. Schon vorher gibt es um 16:30 Uhr am selben Ort eine Einführung in das Arbeiten mit der Geometrie-Software GEONE$_X$T[1,2], die insbesondere für den Schulunterricht gedacht ist und sowohl als Hilfe für das Erstellen von Unterrichtsmaterial, als auch direkt als Geometrieprogramm für die Schülerinnen und Schüler, geeignet ist.

Aufgabe 10 (theoretische Aufgabe zu linearen Differenzengleichungen) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Matrix.

a) A habe den einfachem Eigenwert 1, die weiteren (evtl. komplexen) Eigenwerte von A haben Betrag < 1. Betrachte die Folge $(x(t))_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$x(t+1) = Ax(t)\ .$$

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge und bestimmen Sie abhängig vom Anfangswert den Grenzwert der Folge.

b) Berechnung von A^n. Gegeben sei die Differenzengleichung $x(t+1) = Ax(t)$ mit Lösung $x(t) = A^t x(0)$ abhängig vom Startwert $x(0)$. Sei weiter das Minimalpolynom χ_A von A durch

$$\chi_A(x) = x^r + \alpha_1 x^{t-1} + \cdots + \alpha_r x^0$$

gegeben. Nützen Sie den Satz von Cayley-Hamilton ($\chi_A(A) = 0$) um eine Differenzengleichung r-ter Ordnung zu finden, die $x(t)$ beschreibt und die Startwerte $x(0), Ax(0), A^2x(0), \ldots, A^{r-1}x(0)$ besitzt. Was können Sie über das Verhalten der Lösungen aussagen, wenn $\sum_{j=1}^{r} |\alpha_j| < 1$ ist? Was im Fall $\sum_{j=1}^{r} |\alpha_j| = 1$?

Aufgabe 11 (Rechenaufgaben mit linearen Differenzengleichungen) Es sei $\mathbb{K}$ einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

a) Vergleichen Sie die Differenzengleichungen

$$x(t+1) = Ax(t) + b \quad \text{mit } x(t), b \in \mathbb{K}^n \text{ und } A \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

und

$$\tilde{x}(t+1) = \tilde{A}\tilde{x}(t) \quad \text{mit}$$
$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0\cdots 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

[1] Was, Sie kennen GEONE$_X$T noch nicht? Dann „müssen" Sie da unbedingt hin!

[2] Sie kennen GEONE$_X$T schon? Hier erfahren Sie, wie Sie es am besten in der Schule einsetzen!

Für welchen Wert von $x_{n+1}(0)$ stimmen die Lösungen der Gleichungen im Wesentlichen überein? Benutzen Sie diesen Zusammenhang, um die Gleichung

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

b) Lösen Sie

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x(t) + b(t)$$

für $x(0) = 0$ mit

$$\begin{cases} b(t) & = 2^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ b(t) & = 5^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Tip: Machen Sie den Ansatz $p(t)\lambda^t v$ mit einem Polynom p, Vektor v und Eigenwert λ.

Aufgabe 12 (Die Logistische Gleichung bei $r = 4$.) Betrachten Sie die Gleichung $x(t+1) = 4x(t)(1-x(t))$ auf $[0,1]$. Zeigen Sie:

a) Jede Lösung läßt sich in der Form $x(t) = sin^2(2^t \pi\alpha)$ mit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ darstellen.

b) An der dyadischen Entwicklung von $\alpha = \sum_{k=2}^{\infty} d_k 2^{-k}$ (dabei ist je $d_k \in \{0,1\}$) läßt sich das Verhalten der Lösung ablesen.

c) Charakterisieren Sie alle schließlich periodischen Lösungen.

Aufgabe 13 (Just-in-time-Produktion) Wir betrachten eine idealisierte Autofabrik, die abhängig von einer Schätzung des Absatzes ihre Produktion anpasst. Die Schätzung $S(t)$ der zu erwartenden Auto-Nachfrage in drei Wochen ist durch

$$S(t) = 4000 - a(t+2) - \frac{2}{3}a(t+1) - \frac{1}{3}a(t)$$

mit $a(t)$ produzierten Autos der Woche t, $a(t+1)$ in der kommenden Woche fertiggestellten Autos und $a(t+2)$ in zwei Wochen vollendeten Autos, gegeben. Nach der Schätzung werden sogleich die nötigen Teile bestellt und erreichen in der Woche darauf (Einzelteile: $e(t+1) = S(t)$) die Fabrik. Dort werden sie innerhalb einer Woche zu einem Autoskelett montiert, bzw. Einzelteile wie Sitze, Armaturenbretter fertig gestellt (Rohmontage: $r(t+1) = e(t)$). In der dritten Woche wird die Innenausstattung montiert, Sonderwünsche werden integriert und die Automobile werden lackiert (Autos: $a(t+1) = r(t)$).

a) Geben Sie eine Differenzengleichung für $a(t)$ an. Welche Ordnung hat sie?

b) Geben Sie eine Differenzengleichung der Ordnung 1 für den Zustand der Fabrik an, die von den Einzelteilen bis zu den fertigen Autos reicht.

c) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen beiden Gleichungen.

d) Hat dieses Modell Fixpunkte? Wenn ja: Welche?