LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 28. Oktober 2003

3. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 4. 11. 2003, bis 15:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Aufgabe 7 (Stabilität) Wir betrachten die Gleichung $x(t+1) = f(x(t))$ für folgende f:

a) Betrachten Sie erneut (vgl. die logistische Gleichung von Blatt 2, Aufgabe 6)

$$f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & r \cdot x \cdot (1-x) \end{cases}$$

mit einem Parameter $0 \leq r \leq 4$. Was können sie über die Stabilität der genau 2-periodischen Punkte aussagen? Suchen Sie sich ruhig ein $r \in [3,4]$ aus, für das Sie die Frage *nicht* beantworten. Benutzen Sie (ohne Beweis), dass es für $r \leq 3$ keine genau 2-periodischen Punkte gibt und die genau 2-periodischen Punkte für $r > 3$ durch

$$x_{1/2} := \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r}\sqrt{r^2-2r-3} \quad \in [0,1]$$

gegeben sind.

b) Es sei

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(\cos(x)) \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass es genau einen stationären Punkt y gibt. Geben Sie explizit ein Intervall um y an, in dem der Betrag der Ableitung von 1 verschieden ist. Was können Sie über die Stabilität des stationären Punktes sagen?

Bemerkung: Auch ohne konkrete Berechnung von y können sie mit Methoden der Analysis I zum Ziel gelangen, jedoch empfiehlt es sich ein paar Rechnungen mit dem Taschenrechner durchzuführen.

c) Zu gegebener stetiger Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \left| \frac{g(x)}{x^3} \right| = 0$$

sei für $\alpha < 0$ die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \alpha x^3 + g(x) \end{cases}$$

definiert. Was können Sie über die Stabilität des Fixpunktes $x_0 = 0$ sagen?

Hinweis: Zeigen Sie, dass $|f(x)| < |x|$ für hinreichend kleine $|x|$ gilt.

Aufgabe 8 (Ein System 2. Ordnung) Es seien a_1 und a_2 reelle Konstanten und durch

$$x(t+2) - a_1 x(t+1) - a_2 x(t) = 0$$

sei eine Differenzengleichung zweiter Ordnung gegeben.

a) Bestimmen Sie eine äquivalente Differenzengleichung erster Ordnung.

b) Was ist, abhängig von a_1 und a_2, die allgemeine reelle Lösung?

Aufgabe 9 (Maple und das Nullstellen zählende Integral) Aus der Funktionentheorie entnehmen wir folgenden Satz:

Satz 1 *Ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine polynomiale Abbildung ohne Nullstellen auf dem Einheitskreis, so gibt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_1(0)} \frac{p'(z)}{p(z)} dz := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{p'(e^{it})}{p(e^{it})} e^{it} dt$$

die Zahl der mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen von p innerhalb des komplexen Einheitskreises $K_1(0)$ an.

Mit Hilfe dieses sogenannten „Nullstellen zählenden Integrals“ können Sie rechnerisch die Zahl der Nullstellen innerhalb des Einheitskreises bestimmen.

1. „Programmieren“ Sie in Maple eine Routine, die die Zahl der Nullstellen eines Polynoms in $K_1(0)$ bestimmt. Gehen Sie dabei davon aus, dass Maple das Integral höchstens mit einem Fehler $< 1/2$ berechnet und runden Sie das Ergebnis auf den korrekten ganzzahligen Wert.

2. Verwenden Sie diese Routine für die Differenzengleichung
$$x(t+5) - 2x(t+1) - \alpha x(t) = 0$$
in Abhängigkeit α die Stabilität der 0 zu untersuchen. Probieren Sie z.B. alle $\alpha \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ aus. Was sieht man? Die angegebene Menge ist nicht wirklich gut geeignet, aber überzeugen sie sich selbst in Maple davon. Ersetzen Sie die kritischen α-Werte durch besser geeignete Zahlen und kommentieren sie Ihre Wahl.

Schicken Sie Ihr Programm und Ihre Antworten bitte per E-Post an die Adresse sebastian.mayer@matha.rwth-aachen.de.

Beispielhafte Sammlung von Maple-Befehlen

> \> p:=x^2*(x+I/2)*(x-1/2)*(x+5); #I ist die imaginäre Einheit: I^2=-1
>
> \> p:=expand(p); #ein ähnlicher Befehl ist simplify(); Beide versuchen Äquivalenzumformungen.
>
> \> p:=subs(x=y,p); #So schreibt man f(x) als f(y) oder f(x) als f(e^{it}) (subs(x=exp(I*t),f)).
>
> \> diff(p,x); # Eine Ableitung nach x an der Stelle x.
>
> \> diff(p,y); #Eine Ableitung nach y an der Stelle y.
>
> \> D(x -> x^2)(z); #Eine Ableitung der Quadrat-Funktion an der Stelle z.
>
> \> integrand:=t^3; #Zur Übersichtlichkeit definiert man sich solche Variablen.
>
> \> Int(integrand,t=0..Pi); #vgl. int(integrand,t=0..Pi), was symbolisch rechnet und sich schon mal verrechnet.
>
> \> evalf(Int(integrand,t=0..2)); #numerische Berechnung obigen Integrals.
>
> \> for alpha in {-3, -2, -1 ,0, 1, 2, 3 } do print(alpha,integral(alpha))); od; #Scheint das selbe wie for alpha from -3 to 3 do zu sein, bloß: Die Reihenfolge ist nicht festgelegt und es bietet mehr Möglichkeiten, über was alles summiert wird.