LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 21. Oktober 2003

2. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 28. 10. 2003, bis 15:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Aufgabe 4 (Legosteine, zweiter Versuch) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir eine Menge von $2n$ Zweierpaaren von Legosteinen. Jeder Stein ist entweder rot oder weiß. Die Zahl der Paare rot/rot, rot/weiß, bzw. weiß/weiß zu Beginn wird mit $x_1(0)$, $x_2(0)$, bzw. $x_3(0)$ bezeichnet, dabei wird nicht zwischen rot/weiß und weiß/rot unterschieden. Wir betrachten diskrete Zeiten $t \in \mathbb{N}$. Der Übergang $t \mapsto t+1$ geschieht wie folgt: Wir zerlegen alle Paare. Dann bilden wir durch zufälliges Ziehen von Legosteinen und kombinieren wieder $2n$ Zweierpaare. Das Ziehen und Neukombinieren wird jeweils zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle möglichen Züge ausgeführt. Die Zahl der Paare rot/rot, rot/weiß, bzw. weiß,/ weiß zum Zeitpunkt t wird mit $x_1(t)$, $x_2(t)$ bzw. $x_3(t)$ bezeichnet.
Schreiben Sie ein Maple-worksheet dass ein solches Vorgehen simuliert: Unter der Vorgabe von $x_1(0)$, $x_2(0)$ und $x_3(0)$ sowie $M \in \mathbb{N}$ sollen $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ für alle natürlichen $t \leq M$ simuliert werden, d.h. ein Durchlauf des Programms soll mit Hilfe von Zufallszahlen die Neukombinationen durchführen. Dann führen Sie die Zufallsexperimente für folgende Parameter durch:

- Wählen Sie für einen ersten Durchlauf $x_1(0) = 100$, $x_2(0) = 100$, $x_3(0) = 0$ und $M = 10$. Was fällt Ihnen auf? Wiederholen Sie evtl. das Experiment ein paar Mal.
- Wählen Sie für einen zweiten Durchlauf $x_1(0) = 150$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 150$ und $M = 10$. Was fällt nun auf?

Beachten Sie die Hinweise zu Maplebefehlen am Ende des Aufgabenblattes! Schicken Sie Ihr Programm und Ihre Antworten bitte per E-Post an die Adresse sebastian.mayer@matha.rwth-aachen.de.

Aufgabe 5 Es sei $U \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : U \to U$ eine monoton wachsende, stetige Funktion. Zu $y \in U$ betrachten wir die Folge $x(t)$ mit

$$x(t+1) = f(x(t)) \text{ und } x(0) = y\,.$$

a) Zeigen Sie:

   i) Für $f(y) \geq y$ ist $x(t)$ monoton wachsend und falls die Folge $(x(t))_{t\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist konvergiert sie gegen einen stationären Punkt.

   ii) Für $f(y) \leq y$ ist $x(t)$ monoton fallend und falls die Folge $(x(t))_{t\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist konvergiert sie gegen einen stationären Punkt.

   Wie ändern sich diese Aussagen, wenn auf die Stetigkeit von f oder die Abgeschlossenheit von U verzichtet wird?

b) Nun sei $U = [0,\infty[$ und $f : U \to U$,

$$f(x) := r \cdot \frac{x}{1+x/K}\ ,$$

   mit positiven Konstanten r und K gegeben. Diskutieren Sie das Verhalten der Folge $(x(t))_{t\in\mathbb{N}}$, also Monotonie und Grenzwert, in Abhängigkeit von r, K und dem Startwert y aus U.

Hinweis: Analysis I könnte hilfreich sein.

Aufgabe 6 Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$f(x) := r \cdot x \cdot (1-x)$$

für ein $0 \le r \le 4$ gegeben. Betrachtet wird die Folge $x(t)_{t\in\mathbb{N}}$ mit $x(t+1) = f(x(t))$. Berechnen Sie abhängig von r die stationären Punkte und die 2-periodischen Punkte $f(f(x)) = x$ und bewerten Sie die Stabilität der stationären Punkte.
Mit Maple berechnen Sie je für die drei Anfangswerte 0.1, 0.5 und 0.9 in [0,1] und die Werte $r = 0.9$, $r = 1.9$, $r = 3.1$ und $r = 3.9$ die ersten 100 Folgenglieder. Kann man ein asymptotisches Verhalten ablesen? Senden Sie das Maple-worksheet per Mail an die übliche Adresse und reichen Sie die Antwort auf die erste Frage in schriftlicher Form ein.

Beispielhafte Sammlung von Maple-Befehlen

> randomize(): # Der Zufallszahlengenerator wird mit Hilfe der Computeruhr initialisiert.

> rand(); #Das Ergebnis ist eine 12-stellige ganze Zufallszahl. Aber besser benützt man statt dessen:

> rand(a..b)(); #Das Ergebnis ist eine zufällige zwischen a und b liegende Zahl (gleiche Wahrscheinlichkeiten)

> wuerfelwurf:=rand(1..6)(); #Das simuliert den normalen 6-seitigen Würfel.

> x:=array(1..3,0..M); #Ein zweidimensionales Feld

> x[1,0]:=150; x[2,0]:=0; x[3,0]:=150;

> #Und nun ein Trick:

> if rand(1..a+b)<=a then ... else ... fi; #Unter ... ist hier noch etwas zu ergänzen. Welche Wahrscheinlichkeit hat wohl rand(1..a+b)≤a?

> r x (1-x); #So ist das falsch! Schreibe besser:

> r∗x∗(1-x);

Sie können Schleifen ineinander schachteln. Folgende Zeile führt den inneren Block M·N mal aus:

> for i from 1 to M do for j from 1 to N do . . . od: od:

> befehl:=proc(x_1,x_2,...,x_n) local $h_1, h_2, \ldots$; global $g_1, \ldots$; *Anweisungsblock für Berechnungen, . . .* ; return *Ergebnis*; end:

Zur Erinnerung:

Die Maple-Hilfe gibt Ihnen Beispiele und Erklärungen zu den Befehlen. Geben Sie einfach eines der Schlüsselwörter ein und rufen Sie die Hilfe dafür auf (Cursor an den Wortanfang stellen). Weil die Maple-Hilfe etwas gewöhnungsbedürftig ist, empfiehlt es sich, sie auch für bekannte Befehle zu verwenden, um sich an den Stil der Beschreibungen zu gewöhnen.