LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 27. Januar 2004
13. und letztes Übungsblatt

13. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 3. 2. 2004, bis 16:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Aufgabe 38 (Der Brüsselator, zweiter Teil) Es geht immer noch um $\dot{x} = f(x)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a - bx_1 + x_1^2 x_2 - x_1\\ \dot{x}_2 &= bx_1 - x_1^2 x_2\end{aligned}$$

Die positive Invarianz des positiven Quadranten P und die Existenz von $S(t,y)$ für alle positiven t und alle y aus P wurde bereits gezeigt. Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f in P, und für jedes stationäre $y_0 \in P$ die Funktionalmatrix $Df(y_0)$ und ihre Eigenwerte. Unter welchen Bedingungen von a und b haben beide Eigenwerte negativen Realteil?

Aufgabe 39 (Die Bewegungsgleichung des freien Massepunktes (in Dimension 1)) Symmetrie- und Invarianzprinzipien bestimmen in einfachen mechanischen Systemen schon weitgehend die Gestalt der Differentialgleichungen, welche die Bewegung beschreiben. Einfaches Beispiel: Bewegungsgleichung eines freien Massepunktes in Dimension 1.
Es sei (x ist die Ortskoordinate)

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x})$$

mit einer $\mathcal{C}^1$-Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben.

Forderung 1 (Galilei-Invarianz): Ist $z(t)$ Lösung, und sind α, β beliebige Konstanten, so ist auch $z(t) + \beta t + \alpha$ Lösung.

Zeigen Sie: g ist konstant.

Forderung 2 (Spiegelinvarianz): Ist $z(t)$ Lösung, so auch $-z(t)$.

Zeigen Sie: $g = 0$ (Falls beide Forderungen erfüllt sind).

Aufgabe 40 (Chemostat-Variante) Es seien r, δ und z_0 positive Konstanten, weiter sei $\mu : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine stetig differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften: $\mu(0) = 0$, $\lim_{x_0 \to \infty} \mu(x_0) = 0$, μ ist strikt monoton wachsend für $0 \le x_0 \le z_0$ und strikt monoton fallend für $x_0 \ge z_0$ und $\mu'(x_0) \ne 0$ für alle $x_0 \ne z_0$ (Inhibition bei hohen Substrat Konzentrationen). Weiter sei folgende Gleichung gegeben:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= r - \mu(x_0)x_1 - \delta x_0\\ \dot{x}_1 &= \mu(x_0)x_1 - \delta x_1\end{aligned}$$

a) Finden Sie eine lösungserhaltende Abbildung in ein eindimensionales System.

b) Zeigen Sie die positive Invarianz des positiven Quadranten P.

c) Zeigen Sie die Existenz von $S(t,y)$ für alle $t > 0$ und $y \in P$.

d) Bestimmen Sie die stationären Punkte und die Linearisierung der rechten Seite der Gleichung an diesen Stellen. Was können Sie über die Stabilität der Punkte ablesen? (Fallunterscheidung, vernachlässigen Sie Fälle mit Eigenwert 0)

e) Falls es drei stationäre Punkte im positiven Quadranten P gibt: Zeigen Sie:

   i) Es gibt genau zwei lokal asymptotisch stabile Punkte

   ii) Jede Lösung konvergiert gegen einen stationären Punkt.

   iii) Was passiert mit Punkten auf der Trennungslinie zwischen den Einzugsgebieten der stabilen stationären Punkte?

f) Interpretieren Sie das Verhalten der Lösungen biologisch (insbesondere in der Nähe der stationären Punkte).

Aufgabe 41 (Der Sonderpunkt für Allgemeinbildung)

> *Es war mitten auf einer steinernen Straße, und seitlich davon ragte ein finsteres Bauwerk mit zwei gewaltigen Türmen auf. Es war kalt, und es regnete. Dennoch war die ganze Gegend, soweit man blicken konnte, voll von torkelnden Großnasen. So bunt habe ich sie noch nie gesehen. Sie gaben Laute von sich, von denen ich vermute, daß sie für Musik gelten sollten. Die Großnasen — alle, Männer, Weiber, Kinder — hatten ihre ohnedies großen Nasen noch durch aufgesetzte Papiernasen künstlich verlängert und vergrößert. Selbst den Hunden und Pferden hatten sie — meist rote — Nasen aufgeklebt. Sie erschlugen einander mit Flaschen, fielen aber nicht immer tot um. Offenbar machte ihnen das in der Stimmung, in der sie waren, nichts aus. Sie standen dicht an dicht, und vorwärts bewegen konnten sie sich nur, indem sie sich mühsam aneinander vorbeiwälzten. Der Lärm und Krach war unbeschreiblich. Dicht neben mir drosch einer, der aussah wie ein Faß mit Ohren, auf eine ungeheuer große Trommel, und ein Weib, dass so dick war wie ein Pferdearsch und roch wie ein Abtritt, lachte dämonisch, als ich neben ihr auftauchte, und brüllte mir etwas ins Gesicht, das wie ≪Kö–leng–ang–laf≫ klang. Dann begann plötzlich die Menge regelmäßig hin- und herzuwackeln …*

a) Was wird hier beschrieben?

b) Von wem stammt die Beschreibung?

c) Aus welchem literarischen Werk stammt das Zitat?