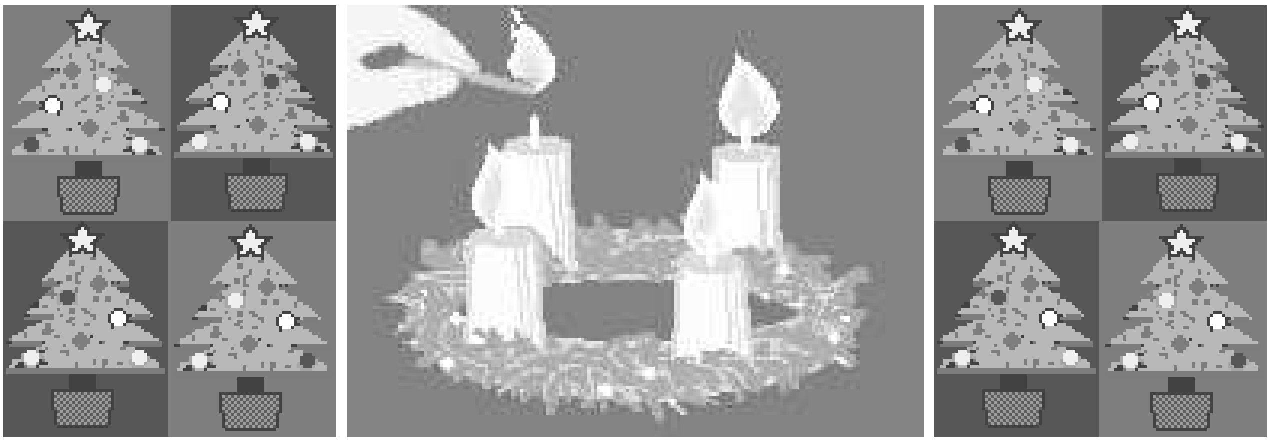
LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 16. Dezember 2003

10. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 13. 1. 2004, bis 16:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155



Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Hinweis: Am 8. Januar findet die Vorlesung statt der Übung um 10:00 Uhr in Hörsaal V statt.

Aufgabe 28

a) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $\gamma(a) \in V$ und $\gamma(b) \in \mathbb{R}^n \setminus V$. Zeige:

  i) Es gibt ein $t_0 \in [a,b]$ mit $\gamma(t_0) \in \partial V$.

  ii) Es gibt ein $\tau \in [a,b]$ mit $\gamma(\tau) \in \partial V$ und $\gamma(\tau) \in V$ für alle $a \leq t < \tau$.

b) Seien

$$\varphi : \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{und}$$
$$\rho : \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad \rho(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^4$$

gegeben. Desweiteren sei

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i x_k \ \text{ (mit Konstanten } \alpha_{ik} \in \mathbb{R})$$

eine quadratische Form.

  i) Es gibt Konstanten c_1, c_2 mit $c_1\varphi(x) \leq \psi(x) \leq c_2\varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

  ii) Es gibt positive Konstanten k_1, k_2 mit $k_1\varphi(x)^2 \leq \rho(x) \leq k_2\varphi(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 29 (Chemostat-Gleichung(vereinfacht)) Ausnahmsweise gibt es hierfür 3 Punkte Wir betrachten das Differentialgleichungssytem

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= r - \frac{a_1 x_1}{c_1 + x_1} x_2 - \frac{a_2 x_1}{c_2 + x_1} x_3 - \delta x_1 , \\
\dot{x}_2 &= \frac{a_1 x_1}{c_1 + x_1} x_2 - \delta x_2 , \\
\dot{x}_3 &= \frac{a_2 x_1}{c_2 + x_1} x_3 - \delta x_3
\end{aligned}$$

mit positiven Konstanten r, a_1, a_2, c_1, c_2 und δ.

a) Zeige die positive Invarianz des abgeschlossenen positiven Oktanten $P = [0, \infty[^3$.

b) Finde eine lineare lösungserhaltende Abbildung φ in $\mathbb{R}$ (analog zum 2-dim Chemostat-System).

c) Zeige, dass alle Lösungen mit Anfangswert $x(0)$ in P für alle positiven Zeiten $t \geq 0$ existieren.

d) Untersuche in Abhängigkeit von den Parametern die stationären Punkte in P und deren Stabilität. Diskutiere nur die Fälle mit endlich vielen stationären Punkten.

e) Zeige die Invarianz des Teilsystems $x_3 = 0$ und geben Sie die Konvergenzeigenschaften in diesem Fall an.

f) Bestimme die Limesmenge einer Lösung mit beliebigem Anfangswert (im Fall nur endlich vieler stationärer Punkte in P) mit Hilfe von φ.

g) Nutze Maple, um für die auftretenden Fälle Bilder des Phasenraums zu erstellen. Da sich keine dreidimensionalen Phasenraumportraits darstellen lassen, wählen Sie geeignete Schnitte mit Ebenen aus. Überlegen Sie sich, welche Punkte Sie mit abbilden wollen.

Aufgabe 30 (Teilchen in einem 1-dim. Kraftfeld (mit Reibung)) Betrachte

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 , \\
\dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \gamma'(x_1)
\end{aligned}$$

mit einer $\mathcal{C}^2$-Funktion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren kritischen Punkte alle isoliert sind, und einer Konstante $\alpha \geq 0$.

a) Geben Sie ein erstes Integral bzw. eine Ljapunov-Funktion an (vgl. Vorlesung).

b) Berechnen Sie die stationären Punkte und deren Stabilität abhängig von der Art der kritischen Punkte von γ.

c) Zeige: Ist $\lim_{|x_1| \to \infty} \gamma(x_1) = \infty$, so existieren alle Lösungen $S(t, y)$ für alle positiven Zeiten $t \in [0, \infty[$.

d) Wie sehen im Fall $\lim_{|x_1| \to \infty} \gamma(x_1) = \infty$ und $\alpha > 0$ die Limesmengen aus?

Aufgabe 31 (Maple: Hurwitz-Routh) Das Hurwitz-(Routh-)Kriterium besagt, dass für ein Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffizienten a_j folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle Nullstellen λ von p ist $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

(ii) Für alle $0 \le k < n$ ist $a_k > 0$ und für alle $1 < k < n$ ist $\det H_k > 0$ mit

$$H_1 = (a_1),\ H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},\ \dots,\ H_{n-1} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n := 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}\right\}}_{n-1} n-1$$

Die $k-te$ Zeile von H_l besteht also aus $a_{2k-1}, a_{2k-2}, a_{2k-3}, \dots, a_{2k-l}$, wobei $a_n := 1$ und $a_m := 0$ für $m > n$.

a) Schreiben Sie eine Maple-Prozedur, die für gegebenes Polynom in x mit reellen Koeffizienten und führendem Koeffizienten 1 angibt, ob alle (evtl. komplexen) Nullstellen einen negativen Realteil haben. Dazu beginnen Sie z.B. mit

```
[> with(linalg); #für die Befehle matrix und det.
```

```
> hurwitz:=proc(f)
  local realteilpositiv, i, ...
  realteilpositiv:=true; # Nur negative Realteile, außer wir finden noch was.
  for i from 0 to degree(g,x) do
        if coeff(g,x,i) <= 0 then
              realteilpositiv:=false;
        fi;
  od;
  ...
  return realteilpositiv;
  end:
```

b) Sei nun die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4/3 & -1 & 1/3 + b/3 & -1/3 & 1 - 2b/3 \\ -1/3 & 1 - b & -5/3 + b/3 & -1/3 & 2 + b/3 \\ -2/3 & 2 & -4/3 - b/3 & -2/3 & 2b/3 \\ -1/3 & 2 - b & -2/3 + b/3 & -4/3 & 3 + b/3 \\ -1/3 & -1 & 1/3 + b/3 & -1/3 & -2b/3 \end{pmatrix} \cdot x$$

mit einem $b \in \mathbb{R}$ gegeben. Verwenden Sie Ihre Prozedur aus Teil a) um durch Variation des Parameters zu testen, für welche Werte von b die konstante Lösung $x \equiv 0$ asymptotisch stabil ist. Die Matrix ist auch im Internet in einer (sonst leeren) Maple-Datei verfügbar. Übrigens könnte der Befehl charpoly(M,x) hilfreich sein.