Die g-adische Bruchdarstellung

Vortrag im Rahmen des Proseminars zur Analysis, 24.03.2006

Michael Hester

Ziel dieses Vortrags ist eine konkrete Darstellung der rellen Zahlen, wie etwa die allgemein bekannte und gebräuchliche Dezimaldarstellung oder die von Computern genutzte Binärdarstellung, zu entwickeln.

§ 1 Die g-adische Bruchdarstellung

(1.1) Satz.
Sei $g \in \mathbb{N}, g \geq 2$. Dann sind die rellen Zahlen genau die Zahlen der Form

$$x = \varepsilon \sum_{k=N}^{\infty} a_k g^{-k} := \lim_{n \to \infty} \varepsilon \sum_{k=N}^{n} a_k g^{-k}; \qquad \varepsilon = \pm 1, N \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, ..., g-1\}. \tag{1}$$

Man nennt (1) eine *unendliche* $g-$ *adische Bruchdarstellung* von x.
Insbesondere erhält man im Fall $g = 10$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine *unendliche Dezimaldarstellung*.$\diamond$

Beweis:
Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.
1.Schritt: Wir zeigen, dass $(S_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, und im
2.Schritt: $(S_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$.

I.: Sei $S_n := \varepsilon \sum\limits_{k=-N}^{n} a_k g^{-k}, \quad a_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $g^{-n} < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Dann gilt für alle $n \geq m \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= |\varepsilon \sum_{k=-N}^{n} a_k g^{-k} - \varepsilon \sum_{k=-N}^{m} a_k g^{-k}| = |\varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} a_k g^{-k}| \\
&\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| g^{-k} \\
&\overset{0 \leq a_k \leq g-1}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} (g-1) g^{-k} \\
&\leq (g-1) \sum_{k=n_0+1}^{\infty} g^{-k}
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{mit 1 erweitern}}{=} (g-1)g^{-n_0-1} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} g^{-k+n_0+1}$$
$$\overset{\text{Indexversch.}}{\leq} (g-1)g^{-n_0-1} \sum_{l=0}^{\infty} (\frac{1}{g})^l$$
$$\overset{\text{Geo. Reihe}}{=} (g-1)g^{-n_0-1} \frac{1}{1-\frac{1}{g}}$$
$$= (g-1)g^{-n_0-1} \frac{g}{g-1} = g^{-n_0} < \delta$$

Also ist $(S_n)_n$ eine CAUCHY-Folge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $x := \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$.

II.: Sei nun $x \in \mathbb{R}$ und ohne Einschränkung $x > 0$ (sonst betrachte $-x$). Wir wählen $N \in \mathbb{Z}$ minimal mit $g^N x \geq 1$. Weil $(g^n)_n$ unbeschränkt und monoton wachsend ist, ist $M := \{n \in \mathbb{Z}; g^n \cdot x \geq 1\} \neq \emptyset$. Definiere $N := min(M)$, dann gilt $g^{N-1} < 1 \Leftrightarrow g \cdot g^{N-1} < g$, also

$$1 \leq g^N x < g, \quad Def.: a_N := [g^N x] \in \{1, \cdots, g-1\}, \text{damit gilt}$$
$$0 \leq g^N x - a_N < 1, (\text{da } a_N < g^N x) \quad \text{also} \quad 0 \leq x - a_N g^{-N} < g^{-N}.$$

Sind $a_N, \cdots, a_r$ auf diese Weise bereits konstruiert mit $0 \leq y := x - \sum\limits_{k=N}^{r} a_k g^{-k} < g^{-r}$, so sei der $r+1$te Koeffizient

$$a_{r+1} := \left[g^{r+1} y\right] \in \{0, \cdots, g-1\}, \text{ also}$$
$$0 \leq g^{r+1} y - a_{r+1} < 1.$$
$$\overset{s.o}{\Leftrightarrow} 0 \leq y - a_{r+1} g^{-(r+1)} < g^{-(r+1)}$$

Wir haben also $|x - \sum_{k=N}^{n} a_k g^{-k}| < g^{-n}$. Weil $(g^{-n})_n$ nach III.(3.5)[1] eine Nullfolge ist, ist $(s_n)_n = (\sum_{k=N}^{n} a_k g^{-k})_n$ eine Folge, die gegen x konvergiert. □

Zur Veranschaulichung betrachten wir folgendes

(1.2) Beispiel.

$$0,\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = \frac{9}{10} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1 = 1,\overline{0}$$ ◇

[1] Für $x \in \mathbb{Q}$, $|x| < 1$ ist $(x^n)_n$ eine Nullfolge und $\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=0}^{n} x^j) = \frac{1}{1-x}$.

und stellen fest, dass die g-adische Bruchdarstellung i.A. nicht eindeutig ist.

Nun beschäftigen wir uns zunächst mit der periodischen g-adischen Bruchdarstellung.

(1.3) Definition.
Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$ und

$$x = \varepsilon \sum_{k=-N}^{\infty} a_k g^{-k} \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leq a_k < g, \qquad N \in \mathbb{N}_0,$$

eine unendliche g-adische Bruchdarstellung. Man nennt sie *periodisch*, wenn es ein $s \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{N}$ gibt, mit

$$a_{k+t} = a_k \qquad \text{für alle} \qquad k > s.$$

In diesem Fall heisst

$$\tau := \min\{t \in \mathbb{N};\ \text{es gibt ein } s \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } a_{k+t} = a_k \text{ für alle } k > s\}$$

die *Periodenlänge* und

$$\sigma := \min\{s \in \mathbb{N}_0; a_{k+\tau} = a_k \text{ für alle } k > s\}$$

die *Vorperiodenlänge* der Darstellung. ◇

Damit kommen wir zur Eindeutigkeit der g-adischen Bruchdarstellungen

(1.4) Lemma.

a) Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$ und seien

$$x = \varepsilon \sum_{k=-N}^{\infty} a_k g^{-k} = \varepsilon \sum_{k=-N}^{\infty} a'_k g^{-k}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad N \in \mathbb{N}_0, \quad a_k, a'_k \in \{0, 1, ..., g-1\}.$$

zwei verschiedene g-adische Bruchdarstellungen von x. Dann existiert ein $r \geq -N$ mit $a_k = a'_k$ für alle $k < r$ sowie
entweder $a'_r = a_r + 1$, $a'_k = 0$, $a_k = g-1$ für $k > r$,
oder $a_r = a'_r + 1$, $a_k = 0$, $a'_k = g-1$ für $k > r$.

In jedem Fall gilt $a_r \neq a_{r+1}, a'_r \neq a'_{r+1}$.

b) Für $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}\left[\frac{1}{g}\right]$, also insbesondere für $x \notin \mathbb{Q}$ ist die g-adische Bruchdarstellung eindeutig.

Dabei sei $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{g}\right]$ der von $\mathbb{Z}$ und $\frac{1}{g}$ erzeugte Unterring von $\mathbb{Q}$, der genau aus den ganzzahligen Polynomen in $\frac{1}{g}$ besteht. ◇

Beweis:

zu a) Sei $r := \min\{k \geq -N; \quad a_k \neq a'_k\}$. Wegen $a_k, a'_k \in \{0, \cdots, g-1\}$ gilt damit $|a_r - a'_r| \geq 1$, sowie $|a_k - a'_k| \leq g-1$ für alle k.
Es folgt

$$
\begin{aligned}
0 = |x - x| &= |\varepsilon \sum_{k=-N}^{\infty} a_k g^{-k} - \varepsilon \sum_{k=-N}^{\infty} a'_k g^{-k}| \\
&= |\varepsilon| \cdot |\sum_{k=-N}^{\infty} (a_k - a'_k) g^{-k}| \\
&\overset{a_k = a'_k \forall k<r}{=} |\sum_{k=r}^{\infty} (a_k - a'_k) g^{-k}| \\
&= |a_r - a'_r| \cdot g^{-r} + |\sum_{k=r+1}^{\infty} (a_k - a'_k) g^{-k}| \\
&\overset{|a_r - a'_r| \geq 1}{\geq} g^{-r} + |\sum_{k=r+1}^{\infty} (a_k - a'_k) g^{-k}| \qquad (*) \\
&\overset{Differenz}{\geq} g^{-r} - \sum_{k=r+1}^{\infty} |a_k - a'_k| g^{-k} \\
&\overset{|a_k - a'_k| \leq g-1}{\geq} g^{-r} - \sum_{k=r+1}^{\infty} (g-1) g^{-k} \qquad (**) \\
&\geq g^{-r} - (g-1) \sum_{k=r+1}^{\infty} g^{-k} \\
&= g^{-r} - (g-1) \cdot g^{-(r+1)} \sum_{k=r+1}^{\infty} g^{-k+r+1} \\
&\overset{Idx-Versch.}{=} g^{-r} - (g-1) \cdot g^{-(r+1)} \sum_{k=0}^{\infty} g^{-k} \\
&\overset{geo.Reihe}{=} g^{-r} - (g-1) \cdot g^{-(r+1)} \frac{g}{g-1} \\
&= g^{-r} - g^{-r} = 0
\end{aligned}
$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $a_r - a'_r = \delta = \pm 1$ (siehe $(*)$) und $a_k - a'_k = -\delta(g-1)$ ($(**)$) für alle $k > r$. Wegen $a_k, a'_k \in \{0, \cdots, g-1\}$ bedeutet das

entweder	$a_r - a'_r = 1 \Rightarrow a_r \geq 1$ und $a_{r+1} = a_k = 0, a'_k = g-1$	für alle $k > r$
oder	$a_r - a'_r = -1 \Rightarrow a_r \leq g-2$ und $a_{r+1} = a_k = g-1, a'_k = 0$	für alle $k > r$.

Im ersten bzw. zweiten Fall hat man

$$x = \varepsilon \sum_{k=-N}^{r} a_k g^{-k} \in \mathbb{Q} \qquad \text{bzw.} \qquad x = \varepsilon \sum_{k=-N}^{r} a'_k g^{-k} \in \mathbb{Q}.$$

zu b) Die Aussage folgt aus a), da im Fall der Nicht-Eindeutigkeit entweder $a_k = 0$ oder $a_k = g - 1$ für alle $k > r$, also

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} 0 \cdot g^{-k} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{k=r+1}^{\infty} (g-1) g^{-k} \in \mathbb{Q}$$

und wie in a) gezeigt

$$x = \varepsilon \sum_{k=-N}^{r} a_k g^{-k} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{g}\right] \subset \mathbb{Q}.$$

□

Verschiedene g-adische Bruchdarstellungen hat man also höchstens für $x \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{g}\right] \subset \mathbb{Q}$. In einem solchen Fall ist die Periodenlänge aber 1 und die Vorperiodenlänge $\max\{r, 0\}$ unabhängig von der betrachteten Darstellung (siehe auch Beispiel (1.2)).
Darüber hinaus folgt für die GAUSS-Klammer

$$[x] = \sum_{k=-N}^{0} a_k g^{-k}, \qquad \text{falls } \varepsilon = 1 \text{ und nicht } a_k = g - 1 \text{ für alle } k > 0.$$

Daraus formulieren wir jetzt eine Charkterisierung der rationalen Zahlen im folgenden

(1.5) Satz.
Sei $g \in \mathbb{N}$ $g \geq 2$. Die rationalen Zahlen sind genau diejenigen mit periodischer g-adischer Bruchdarstellung. ◇

Beweis:
$'' \Leftarrow ''$ Wenn $x = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k g^{-k}$ eine periodische Darstellung besitzt, so folgt mit (1.3) und der geometrischen Reihe

$$x = \underbrace{\varepsilon \sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{-k}}_{\text{Vorperiode}} + \underbrace{\varepsilon \sum_{k=1}^{\tau} a_{\sigma+k} \sum_{l=0}^{\infty} g^{-(\sigma+k+l\tau)}}_{\text{Periode}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon \sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{-k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\tau} a_{\sigma+k} \sum_{l=0}^{\infty} g^{-(\sigma+k)-l\tau)} \\
&= \varepsilon \sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{-k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\tau} a_{\sigma+k} g^{-(\sigma+k)} \sum_{l=0}^{\infty} g^{-l\tau)} \\
&= \varepsilon \sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{-k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\tau} a_{\sigma+k} g^{-(\sigma+k)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{g^{\tau}}^{l)} \\
&= \varepsilon \sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{-k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\tau} a_{\sigma+k} g^{-(\sigma+k)} \frac{1}{1-g^{-\tau}} \in \mathbb{Q}
\end{aligned}
$$

Beispiel :
$0,5\overline{37} = \frac{5}{10} + 3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{100}{99} + 7 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{100}{99} = \frac{5}{10} + \frac{37}{990}$

$'' \Rightarrow ''$: Sei andererseits $x = \varepsilon \frac{u}{v}$, $u, v \in \mathbb{N}$, $ggT(u,v) = 1$. Mittels Division mit Rest erhalten wir

$$u = Av + r_0, \quad A \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leq r_0 < v, \tag{2}$$

$$g r_k = a_{k+1} v + r_{k+1}, \quad a_{k+1} \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leq r_{k+1} < v \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq g r_k < g v \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq a_{k+1} v + r_{k+1} < g v \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq a_{k+1} + \frac{r_{k+1}}{v} < g \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq a_{k+1} < g - \frac{r_{k+1}}{v}
\end{aligned}
$$

gilt $0 \leq a_{k+1} < g$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Jetzt verifiziert man mit den beiden Gleichungen

$$\frac{u}{v} = \frac{Av}{v} + \frac{r_0}{v} = A + \frac{r_0}{v} = A + a_1 g^{-1} + \frac{r_1}{v} g^{-1} = A + \sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k} + \underbrace{\frac{r_n}{v}}_{\leq 1} g^{-n}.$$

Also wegen $\mid \frac{u}{v} - A - \sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k} \mid \leq g^{-n}$
erhält man auf diese Weise durch rekursives Einsetzen eine g-adische Bruchdarstellung von $\frac{u}{v}$, wenn man für A noch verwendet, dass jedes $A \in \mathbb{Z}$ eine eindeutige g-adische Bruchdarstellung besitz. Wegen $0 \leq r_k < v$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ muss unter $\underbrace{r_0, \cdots, r_v}_{v+1}$ eine Zahl doppelt vorkommen. Sei also

$$r_s = r_{s+t}, \qquad 0 \leq s < s + t \leq v.$$

Da r_{n+1} und a_{n+1} jeweils durch r_n eindeutig festgelegt sind, folgt

$$r_k = r_{k+t} \text{ und } a_k = a_{k+t} \text{ für alle } k \geq s.$$

Also hat $\varepsilon\frac{u}{v}$ eine periodische g-adische Bruchdarstellung. Die Behauptung folgt aus (1.3). □

Eine erste Anwendung erhalten wir im folgenden

(1.6) Beispiel.
$x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$ und $y = \sum_{p\in\mathbb{P}} 2^{-p}$ ($\mathbb{P}$:=Menge der Primzahlen) sind nicht rational, da die 2-adische Bruchdarstellung jeweils nicht periodisch sind. $n!$ und Primzahlen entwickeln sich nicht periodisch bzw. kommen nicht periodisch vor. ◇

Nun werden wir sehen, dass Perioden- und Vorperiodenlänge nur vom Nenner abhängen.

(1.7) Satz.
Seien $g \in \mathbb{N}$, $\quad g \geq 2$, $\quad u, v \in \mathbb{N}$ mit $ggT(u, v) = 1$ und

$$v = v_1 \cdot v_2, \qquad v_1 = \prod_{p\in\mathbb{P}, p|g} p^{\nu_p(v)}, \qquad ggT(v_2, g) = 1.$$

Dann gilt für die Periodenlänge τ und die Vorperiodenlänge σ einer g-adischen Bruchdarstellung von $\varepsilon\frac{u}{v}$:

a) $\tau = \min\{k \in \mathbb{N}; v_2 \mid (g^k - 1)$.

b) $\sigma = \min\{l \in \mathbb{N}_0; v_1 \mid g^l$.

Insbesondere hängen sie nur vom Nenner v ab. ◇

Beweis:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{u}{v} &= \sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{-k} + \sum_{k=\sigma+1}^{\sigma+\tau} a_k \sum_{l=0}^{\infty} g^{-k-\tau l} \\
&= \sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{-k} + \sum_{k=\sigma+1}^{\sigma+\tau} a_k g^{-k} \sum_{l=0}^{\infty} \left(g^{-\tau}\right)^l \\
&= \sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{-k} + \left(\sum_{k=\sigma+1}^{\sigma+\tau} a_k g^{-k}\right) \frac{g^\tau}{g^\tau - 1}, \\
\Leftrightarrow (g^\tau - 1)u &= \left[\left(\sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{-k}\right)(g^\tau - 1) + \left(\sum_{k=\sigma+1}^{\sigma+\tau} a_k g^{\tau-k}\right)\right] \cdot v
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow g^{\sigma}(g^{\tau}-1)u \overset{\text{mit } g^{\sigma} \text{ erw.}}{=} \left[\underbrace{\left(\sum_{k=-N}^{\sigma} a_k g^{\sigma-k} \right) (g^{\tau}-1)}_{\in\mathbb{Z}, \text{ da } g^{\sigma-k}\geq 0} + \underbrace{\left(\sum_{k=\sigma+1}^{\sigma+\tau} a_k g^{\sigma+\tau-k} \right)}_{\in\mathbb{Z}, \text{ da } g^{\sigma+\tau-k}\geq 0} \right] \cdot v.$$

Weil alle Summen ganze Zahlen sind, folgt

$$v | g^{\sigma}(g^{\tau}-1)u.$$

Wegen $ggT(v,u) = 1$, $ggT(v_1, g^{\tau}-1) = 1$, $ggT(v_2, g^{\sigma}) = 1$ ergibt sich

$$v_1 \mid g^{\sigma} \text{ und } v_2 \mid (g^{\tau}-1).$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} t &:= \min\{k \in \mathbb{N}; v_2 \mid (g^k - 1\} \leq \tau, \\ s &:= \min\{l \in \mathbb{N}_0; v_1 \mid g^l\} \leq \sigma. \end{aligned}$$

Aus $v_1 \mid g^s$ und $v_2 \mid (g^t-1)$ folgt $v \mid g^s(g^t-1)u$, also

$$g^s(g^t-1)u = Av, \quad A \in \mathbb{N}, \quad A = Q(g^t-1)+R, \quad 0 \leq R < g^t - 1$$

nach Division mit Rest.
Nun erhalten wir analog zu oben

$$Q = \sum_{k=0}^{r} a_k g^k, \quad R = \sum_{k=0}^{t-1} b_k g^k, \quad a_k, b_k \in \{0, \cdots, g-1\}.$$

Jetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} = Ag^{-s}\frac{1}{g^t-1} &= \underbrace{Qg^{-s}+R}= Ag^{-s-t}\frac{1}{1-g^{-t}} \\ &= Q\cdot g^{-s} + R\cdot g^{-s}\cdot\frac{1}{g^t-1} \\ &= Q\cdot g^{-s} + R\cdot g^{-s-t}\cdot\frac{1}{1-g^{-t}} \\ &= \sum_{k=0}^{r} a_k g^{k-s} + \sum_{k=0}^{t-1} b_k g^{k-s-t}\cdot\frac{1}{1-g^{-t}} \\ &= \sum_{k=0}^{r} a_k g^{k-s} + \sum_{k=0}^{t-1} b_k g^{k-s-t}\cdot\sum_{l=0}^{\infty} g^{-tl} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{r} a_k g^{k-s} + \sum_{k=0}^{t-1} b_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} g^{k-s-t(l+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{r} a_k g^{k-s} + \sum_{k=0}^{t-1} b_k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} g^{k-s-t(l)}
\end{aligned}
$$

Das ist eine g-adische Bruchdarstellung mit Periodenläng t. Es folgt $\tau \leq t$, also $\tau = t$. Die Vorperiodenlänge ist höchstens s. Also hat man $\sigma \leq s$ und damit $\sigma = s$. □

Mit Grundkenntnissen aus der Algebra erhält man die

(1.8) Bemerkung.
Nach (1.5) kann die Vorperiodenlänge durch geeignete Wahl von v beliebig groß werden. Als Periodenlänge hat man das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $v_2 \cdot x = g^k - 1$, d.h. mit $g^k \in 1 + v_2\mathbb{Z}$ zu finden. In der Algebra lernt man die Ordnung eines Elementes kennen. Damit hat man

$$\tau = \operatorname{ord}(g + v_2\mathbb{Z}) \quad \text{in} \quad (\mathbb{Z}/v_2\mathbb{Z})^*.$$

Der kleine *FERMATsche* Satz besagt

$$\tau \mid \operatorname{ord}(\mathbb{Z}/v_2\mathbb{Z})^* = \varphi(v_2),$$

wobei φ die *EULERsche* phi-Funktion bezeichnet. ◇

Als Anwendung von (1.7) und (1.8) betrachten wir folgende

(1.9) Beispiele.
a) $x = \frac{5}{6},\ g = 10,\ u = 5,\ v_1 = 2,\ v_2 = 3,\ \tau = 1,\ \sigma = 1:$

$$5 = 0 \cdot 6 + 5,\ \ 10 \cdot 5 = 8 \cdot 6 + 2,\ \ 10 \cdot 2 = 3 \cdot 6 + 2,\ \ \frac{5}{6} = 8 \cdot 10^{-1} + \sum_{j=2}^{\infty} 3 \cdot 10^{-j} = 0{,}8\overline{3}.$$

◇

b) $x = \frac{5}{13}:$

$$
\begin{aligned}
&5 = \underline{0} \cdot 13 + 5,\ \ 10 \cdot 5 = \underline{3} \cdot 13 + 11,\ \ 10 \cdot 11 = \underline{8} \cdot 13 + 6, \\
&10 \cdot 6 = \underline{4} \cdot 13 + 8,\ \ 10 \cdot 8 = \underline{6} \cdot 13 + 2,\ \ 10 \cdot 2 = \underline{1} \cdot 13 + 7, \\
&10 \cdot 7 = \underline{5} \cdot 13 + 5 \\
&\Rightarrow \frac{5}{13} = 0{,}\overline{384615}.
\end{aligned}
$$

Zum Abschluss formulieren wir noch den

(1.10) Satz.
$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis:
nach (1.3) mit g = 3 wäre mit $\mathbb{R}$ auch $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ abzählbar. Weil $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ bijektiv zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist, ergibt sich ein Widerspruch, denn $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar. $\square$