LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 10. Juni 2005

9. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 22. Juni 2005, vor der Übung

Aufgabe 1 (Ideale und Lokalisierung)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring (mit Eins); eine Teilmenge $I \subset R$ mit

(i) I ist Gruppe bezüglich „+“,

(ii) I ist Halbgruppe (Monoid) bezüglich „·“,

(iii) $r \cdot j \in I$ für alle $r \in R, j \in I$,

nennt man Linksideal von R. Analog definiert man Rechtsideale. Ein (zweiseitiges) Ideal ist ein Links- und ein Rechtsideal.

(a) Bestimmen Sie die Ideale von $\mathbb{Z}$.

Sei I nun ein Ideal; auf der Quotientenmenge $R/I := \{r + I; r \in R\}$ definiert man die folgenden Verknüpfungen

$$(r + I) + (s + I) := (r + s) + I, \quad (r + I)(s + I) := (r \cdot s) + I.$$

Ein Ideal $\mathfrak{P} \subset R$ heißt Primideal von R falls aus $r \cdot s \in I, r, s \in R$, folgt, dass $r \in I$ oder $s \in I$. Sei $\mathfrak{P} \subset R$ nun ein Primideal. Die LOKALISIERUNG $R_{\mathfrak{P}}$ von R an $\mathfrak{P}$ wird definiert durch

$$R_{\mathfrak{P}} := \{\frac{r}{s}; r \in R, s \in R \setminus \mathfrak{P}\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen den Primidealen von $R_{\mathfrak{P}}$ und $R \setminus (R \setminus \mathfrak{P})$ gibt.

(c) Bestimmen Sie die Menge der Einheiten $R^\star_{\mathfrak{P}}$ von $R_{\mathfrak{P}}$; was bedeutet es, wenn $R_{\mathfrak{P}} \setminus R^\star_{\mathfrak{P}} = \{0\}$?

(d) Beschreiben Sie unter Benutzung von (b) die Lokalisierungen von $\mathbb{Z}$ an Primidealen; charakterisieren Sie dazu zuerst die Primideale von $\mathbb{Z}$.

(e) Überlegen Sie sich warum es sinnvoll ist, Lokalisierungen zu betrachten.

(2+4+1+3+2 Punkte)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. (4 Punkte)

Aufgabe 3

Es sei G die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zu denen es eine natürliche Zahl c gibt, so dass für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq c.$$

Für $f, g \in G$ sei $f \oplus g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

1. $(G, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe,
2. $|f(mn) - nf(m)| \leq (n-1)c$ für alle $f \in G$ und $m, n \in \mathbb{N}$,
3. für jedes $f \in G$ existiert
$$\Phi(f) := \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} \in \mathbb{R},$$
4. die in 3. angegebene Abbildung liefert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi : (G, \oplus) \to (\mathbb{R}, +)$.
Hinweis: Für $r \in \mathbb{R}$ betrachte man die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto [rx]$.

(2+3+3+4 Punkte)