



6. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 1. Juni 2005, vor der Übung

Aufgabe 1

Seien $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Zeigen Sie:

1. $a^m - 1$ ist stets ein Teiler von $a^{mn} - 1$.
2. Ist $m > 1$ und $a^m - 1$ eine Primzahl, so ist m eine Primzahl und $a = 2$.
3. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $a^m - 1$ und $a^n - 1$.

(2+3+3 Punkte)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 1819 und 3587. Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler als ganzzahlige Linearkombination dar. (4 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$. (5 Punkte)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, gibt. (3 Punkte)