LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 28. April 2005

4. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 11. Mai 2005, vor der Übung

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, d.h. alle Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= \phi(a) + \phi(b) \quad && \text{und} \\ \phi(a \cdot b) &= \phi(a) \cdot \phi(b) \quad && a, b \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 2

In $\mathbb{Z}$ erklärt man zwei neue innere Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ durch $x \oplus y := x + y + 1$ und $x \odot y := x + y + xy$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ein zu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ isomorpher Ring ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 3

Seien M, N endliche Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch $M \cup N$ und $M \cap N$ endlich sind und dass

$$\sharp(M \cup N) = \sharp M + \sharp N - \sharp(M \cap N)$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4

Wir definieren die *spezielle lineare Gruppe* über den 2×2-Matrizen

$$SL(2; \mathbb{Z}) := \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ und } \det(M) = ad - bc = 1\}.$$

Zeigen Sie unter Benutzung des Prinzips der vollständigen Induktion, dass

$$SL(2; \mathbb{Z}) := \left\langle J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

d.h. $SL(2; \mathbb{Z})$ wird von J und T erzeugt.

(6 Punkte)