LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 20. April 2005

3. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 4. Mai 2005, vor der Übung

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, die der Ungleichung

$$2^n \geqslant (n+2)^2 + 1$$

genügen. (2 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $(M, \leqslant)$ eine mit einer Halbordnung versehenen Menge. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für jede nach oben beschränkte Teilmenge N von M existiert $\sup N$.

(ii) Für jede nicht-leere Teilmenge N von M existiert $\inf N$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie „$\sup \varnothing$“ definiert ist! (5 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben seien die Menge $M = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, das Element $\mathbf{0} = (0, 0) \in M$ sowie eine Abbildung $\nu : M \to M$ definiert durch

$$\nu(m, n) = \begin{cases} (m+1, n-1), & \text{falls } n \neq 0, \\ (1, m+1), & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass durch $(M, \nu, \mathbf{0})$ ein Modell der natürlichen Zahlen gegeben wird.
2. Folgern Sie aus a), dass $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gleichmächtig sind.

(4+2 Punkte)

Aufgabe 4

Seien (D, S, d), (D', S', d') zwei Peano-Systeme. Nach II Satz (2.9) existiert genau eine bijektive Abbildung $\varphi : D \to D'$ mit

$$\varphi(d) = d', \quad \varphi(S(n)) = S'(\varphi(n)) \quad (n \in D).$$

Seien $+$ und $\oplus$ die Additionen auf D bzw. D'. Zeigen Sie:

(i) Ist φ die bijektive Abbildung von D auf $D^{'}$ aus Teil a), dann gilt

$$\varphi(m+n) = \varphi(n) \oplus \varphi(m) \qquad (n,\, m \in D).$$

(ii) Formulieren und beweisen Sie die entsprechende Aussage für die Multiplikation.

(iii) Formulieren und beweisen Sie die entsprechende Aussage für die „ $\leq$ “-Relation.

(3+4+3 Punkte)