LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 1. Juli 2005

12. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 13. Juli 2005, vor der Übung

Aufgabe 1 (Exponentialfunktion)

Sei $a \in \mathbb{R}^{>0}$ und $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften

(α) $g_a(1) = a$,

(β) $g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $g_a(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}$,

(ii) $g_a(0) = 1$,

(iii) $g_a(-x) = (g_a(x))^{-1}$,

(iv) $g_a(nx) = (g_a(x))^n, \quad n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$,

(v) $g_a\left(\frac{1}{m}\right) = a^{1/m}, \quad m \in \mathbb{N}$,

(vi) $g_a\left(\frac{n}{m}\right) = a^{n/m}, \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$.

Insbesondere ist $g_a|_{\mathbb{Q}} = \exp_a|_{\mathbb{Q}}$. (insg. 7 Punkte)

Aufgabe 2 (der Quaternionen Schiefkörper)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement. Wir nennen R einen *Schiefkörper*, wenn $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe ist. Der Unterschied zu einem Körper besteht folglich darin, dass die Multiplikation nicht kommutativ zu sein braucht. Ihre Aufgabe:

(i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{C}); u, v \in \mathbb{C} \right\}$$

ein Schiefkörper ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{H}, \quad \lambda \mapsto \lambda E_2,$$

ein injektiver Homomorphismus ist.

(iii) Geben Sie eine geeignete $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{H}$ an.

(iv) Finden Sie eine geeignete Einbettung

$$\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{H}.$$

(v) Sei $z \in \mathbb{H}$, dann definieren wir die Abbildung L_z durch

$$L_z : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad w \mapsto z \cdot w;$$

L_z ist die Linksmultiplikation mit z und offenbar eine lineare Abbildung auf $\mathbb{H}$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung bezüglich der in (iii) angegebenen Basis.

(4+1+2+1+2 Punkte)

Aufgabe 3

1. Zeigen Sie $m^k - n^k > k$ für alle $m, n, k \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und $k > 1$.
2. Es seien $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x > y > 0$. Zeigen Sie, dass genau dann $x^y = y^x$ gilt, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

   Hinweis: Schreiben Sie $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(c, d) = 1$, und zeigen Sie $a^{bc} = c^{ad}$ und $b^{bc} = d^{ad}$. Finden Sie weiter $r, s, t \in \mathbb{N}$ mit $ad = rt$, $bc = st$, $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$ und schließlich $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = m^r$, $b = n^r$, $c = m^s$, $d = n^s$. Beweisen Sie nun $r > s$, $t = m^s n^s$ und folgern Sie $r = m = n + 1$ sowie $s = n$.

(2+4 Punkte)