LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 10. Juni 2005

11. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 5. Juli 2005, vor der Übung

Aufgabe 1 (Bewertungen)

Sei K ein Körper. Eine Abbildung $|\cdot| : K \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ heißt *Betrag* von K, wenn für alle $x, y \in K$ gilt:

(B.1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(B.2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(B.3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Sei nun $|\cdot|$ der klassische Betrag auf $\mathbb{Q}$; sei weiter $x \in \mathbb{Q}^\star$ und $p \in \mathbb{P}$, dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $r, a, b \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a, b$, mit $x = \frac{a}{b}p^r$; wir definieren dann $|0|_p := 0$ und $|x|_p := p^{-r}$.

(a) Zeigen Sie, dass $|\cdot|_p$ ein Betrag auf $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Untersuchen Sie die durch $s_k := \sum_{n=0}^{k} n!$ und $t_k := \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}$ definierten Folgen $(s_k)_k$ und $(t_k)_k$ auf Konvergenz bezüglich $|\cdot|$ und $|\cdot|_p$; handelt es sich um Cauchy-Folgen bezüglich $|\cdot|$ oder $|\cdot|_p$?

(3+4 Punkte)

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{C} := \left\{ Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}); x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

mit den üblichen Rechenregeln für Matrizen ein Körper ist. Untersuchen Sie weiterhin, ob die Abbildungen

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix},$$

Einbettungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, d.h. injektive Körperhomomorphismen sind.

(4+2+1 Punkte)

Aufgabe 3

Auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ definiert man das euklidische Skalarprodukt durch $< z, w >:= \mathrm{Re}(z\overline{w})$. Zeigen Sie für alle $w, z \in \mathbb{C}$:

1. Die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung: $| < w, z > | \leq |w| \cdot |z|$. Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn w und z linear abhängig über $\mathbb{R}$ sind.
2. Den Cosinussatz: $|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2 < w, z >$.
3. Die Dreiecksungleichung: $|w + z| \leq |w| + |z|$.

(3+2+2)