LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 31. März 2005

1. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 20. April 2005, vor der Übung

Organisatorisches:

Die Übungen finden Sie auch im Internet unter:

`http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/index.html`

Kontakt: Sprechstunden vereinbaren Sie am besten nach der Vorlesung bzw. nach der Übung oder per E-Mail:

`Stens@mathA.rwth-aachen.de`

`Michael.Hentschel@mathA.rwth-aachen.de`

Die Büros finden Sie in der Kármánstraße 11, zwei Eingänge rechts neben der Fachschaft 1/1, im dritten Stock.

Scheinbedingungen: Die wöchentlich ausgegebenen Übungen sind bis zum Abgabetermin zu bearbeiten. Studierende des Diplomstudiengangs erhalten einen Übungsschein, falls 2/3 der Übungspunkte erreicht wurden. Weiterhin können Studierende des Lehramts einen Leistungsnachweis erwerben, indem <u>zusätzlich</u> zum Erreichen von 2/3 der Übungspunkte, eine mündliche Prüfung über den Stoff der Vorlesung und der Übungen erfolgreich abgelegt wird.

Vorlesungstermine:

Vorlesung	Dienstag 14:00 - 15:30 Uhr	Hörsaal IV	Beginn: 12.4.2005
Vorlesung	Donnerstag 11:45- 13:15 Uhr	Hörsaal III	Beginn: 14.4.2005
Übung	Mittwoch 14:00 - 15:30 Uhr	Hörsaal III	Beginn: 20.4.2005

<u>Bitte beachten:</u> Am Mittwoch den 13.4.2005 wird an Stelle der Übung die Vorlesung gehalten!

Aufgabe 1

Seien X, Y zwei nicht–leere Mengen und $T : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (Lemma 1.37):

(i) T ist injektiv,

(ii) $T(A \cap B) = T(A) \cap T(B), \qquad (A, B \subset X)$,

(iii) $T^{-1}(T(A)) = A, \qquad (A \subset X)$,

(iv) $T(A \setminus B) = T(A) \setminus T(B), \qquad (A, B \subset X)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2

Seien X, Y zwei nicht–leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

1. f ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ existiert. In diesem Fall ist jedes derartige g surjektiv.
2. f ist genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $h : Y \to X$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ existiert. In diesem Fall ist jedes derartige h injektiv.
3. Sind Abbildungen $g,\ h : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ gegeben, so folgt $g = h$.

Man nennt g in a) ein *Linksinverses* und h in b) ein *Rechtsinverses* von f. (2+2+1 Punkte)

Aufgabe 3

Sei X nicht-leer; man nennt $R \subset X \times X$ eine *Äquivalenzrelation*, wenn gilt:

(Ä.1) *Reflexivität*: $(x, x) \in R$ für alle $x \in X$,

(Ä.2) *Symmetrie*: Aus $(x, y) \in R$ folgt $(y, x) \in R$, $x, y \in X$,

(Ä.3) *Transitivität*: Aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt $(y, z) \in R$, $x, y, z \in X$.

Nun seien X, Y zwei nicht–leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir nennen $x_1 \in X$ äquivalent zu $x_2 \in X$, wenn $f(x_1) = f(x_2)$; zeigen Sie dass, hierdurch eine Äquivalenzrelation auf X definiert wird. Zeigen Sie weiter, dass sich jede Äquivalenzrelation auf X in dieser Weise erzeugen läßt. (4 Punkte)

Aufgabe 4

Gegeben sei eine nicht-leere Menge M mit $A \subset M$. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

1. $f_A : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M), \quad X \mapsto X \setminus A,$
2. $g_A : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M), \quad X \mapsto A \Delta X := (A \setminus X) \cup (X \setminus A).$

(2+3 Punkte)