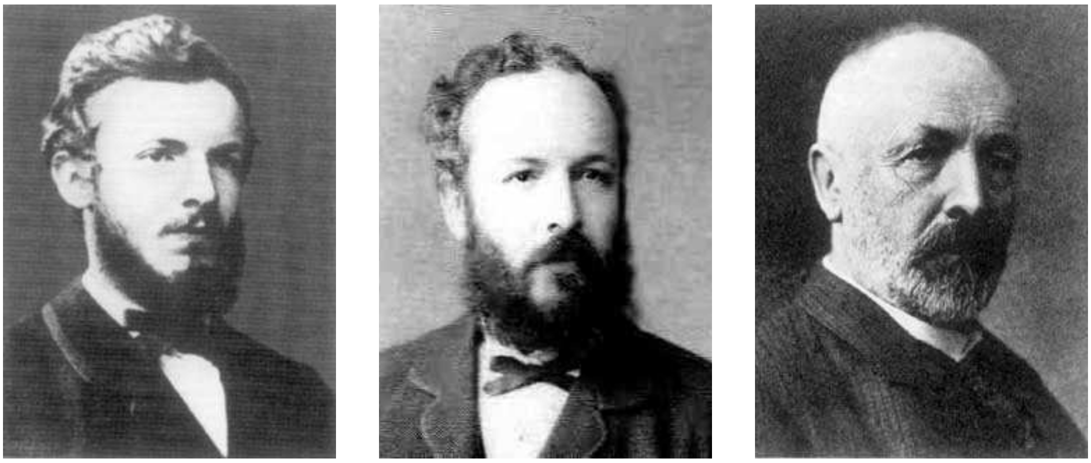
Kapitel 1

Mengen, Relationen, Abbildungen

1.1 Mengen

Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, hat 1895 in [1] eine Menge folgendermaßen definiert: *„Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen."*



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
geb. 3.3.1845 in St. Petersburg, gest. 6.1.1918 in Halle

Hierbei handelt es sich aber nicht um eine exakte Definition, sondern um eine umgangssprachliche Umschreibung der Begriffe „Menge" und „Elemente" mit Hilfe der Begriffe „Zusammenfassung zu einem Ganzen" und „Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens".

Im Gegensatz dazu geht die axiomatische Mengenlehre, wie wir sie hier skizzieren, von zwei Grundbegriffen aus, die nicht definiert werden, nämlich:

1. „Menge", bezeichnet mit $a, b, c, \ldots, A, B, C, \ldots, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$,
2. „$\in$", in der Form $a \in B$, wobei a und B Mengen sind.

Dabei wird $a \in B$ gelesen als „a ist Element von B", „a gehört zu B", „B enthält a (als Element)" oder ähnlich. Für die Verneinung $\neg(a \in B)$ schreibt man meistens $a \notin B$. Die Axiome der Mengenlehre definieren nicht, was eine Menge ist und was $\in$ bedeutet, sondern beschreiben nur Eigenschaften von Mengen, fordern die Existenz gewisser Mengen und legen fest, wie aus gegebenen Mengen neue Mengen gebildet werden können.

Außer den genannten beiden Grundbegriffen benötigt die Mengenlehre noch die mathematische Logik, die wir allerdings im Gegensatz zu einem *streng* axiomatischen Aufbau der Mengenlehre nur im Sinne des gesunden Menschenverstandes benutzen. Wir folgen dabei im Wesentlichen der Darstellung in [7]. Als weitere Lehrbücher zur Mengenlehre seien hier exemplarisch [2, 4, 6, 8, 11, 12, 13] genannt, die teilweise einen logisch fundierteren Aufbau haben.

Axiom 1 (Axiom der Gleichheit, Extensionalitätsaxiom)**.**
Seien A und B Mengen. A und B heißen gleich (Schreibweise $A = B$), wenn gilt

$$a \in A \iff a \in B,$$

d. h., wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Dieses Axiom scheint auf den ersten Blick überflüssig zu sein, da es genau das aussagt, was man von jeder vernünftigen Menge erwartet. Denkt man aber daran, dass wir ja gar nicht wissen, was eine Menge (im mathematischen Sinne) ist und was $\in$ bedeutet, dann sieht man sofort ein, dass es notwendig ist, die Gleichheit von Mengen zu definieren. Es wird auch im Folgenden so sein, dass die Axiome Aussagen über Mengen machen, die für Mengen unserer Anschauung offensichtlich erfüllt sind.

Definition 1.1. Seien A und B Mengen. A heißt Teilmenge von B (Schreibweise $A \subset B$), falls

$$a \in A \implies a \in B.$$

Anstelle von $A \subset B$ schreibt man auch $B \supset A$, gelesen „B ist Obermenge von A“. Gilt $A \subset B$ und $A \neq B$, dann heißt A *echte* Teilmenge von B, Schreibweise $\subsetneqq$. Wir benutzen nicht das Symbol $\subseteq$.

Lemma 1.2. *Seien A, B und C Mengen, dann gilt*

(i) $A = A$ *(Reflexivität),*

(ii) $A = B \implies B = A$ *(Symmetrie),*

(iii) $A = B \wedge B = C \implies A = C$ *(Transitivität),*

(iv) $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C,$

(v) $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A.$

Axiom 2 (Aussonderungsaxiom)**.**
Sei A eine Menge und $E(x)$ eine Bedingung, die auf jedes $x \in A$ entweder zutrifft oder nicht zutrifft, dann existiert eine Menge S, deren Elemente genau die $x \in A$ sind, für die $E(x)$ gilt.

Die Menge S, deren Existenz durch Axiom 2 gefordert wird, schreibt man gewöhnlich in der Form

$$S = \{x \in A;\ E(x)\},$$

z. B., $A =$ Menschen}, $S = \{x \in A;\, x$ ist männlich und verheiratet$\} = \{$Ehemänner$\}$. Die Menge A vor dem Strichpunkt ist hierbei ganz wesentlich. Es muss schon eine Menge existieren, aus der man aussondert, um S zu erhalten. Sonst wäre es möglich, mittels $S = \{x;\, x = x\}$ die berühmte Allmenge zu bilden. Bei uns ist nur die Bildung $S = \{x \in A;\, x = x\}$ $(= A)$ möglich.

Definition 1.3. Sei S eine beliebige Menge, dann heißt

$$\emptyset := \{x \in S;\, x \neq x\}$$

die leere Menge.

Man beachte, dass diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl von S ist. Für jede Menge x gilt $x \notin \emptyset$, d. h., die leere Menge enthält kein Element. Nach Axiom 1 ist sie durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Axiom 3 (Paarbildungsaxiom)**.**
Zu gegebenen Mengen a und b existiert eine Menge U, die diese als Elemente enthält, d. h., für die Menge U gilt $a \in U$ und $b \in U$.

Die Menge U in Axiom 3 enthält möglicherweise viel mehr als nur die Mengen a und b. Mit Hilfe des Aussonderungsaxioms kann man ausgehend von U wie folgt eine Menge definieren, die nur a und b enthält.

Definition 1.4. Seien a und b Mengen und U eine Menge, die a und b als Element enthält. Die Menge

$$\{a, b\} := \{x \in U;\, x = a \vee x = b\}$$

heißt Paarmenge oder ungeordnetes Paar von a und b.

Die Definition der Paarmenge ist unabhängig von der speziellen Wahl von U. Bildet man die Paarmenge für den Fall $a = b$, dann erhält man die Menge $\{a\}$, d. h., die Menge, die nur ein einziges Element, nämlich a, enthält.

Bemerkungen zur Schreibweise: Normalerweise bezeichnen wir Mengen mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots$ und deren Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c, $\ldots$, also $a \in A$, $b \in A$, $c \in B$. Die Größen auf der linken Seite von „$\in$“ sind ebenfalls Mengen (etwas anderes kennen wir nicht), die ihrerseits wieder Elemente enthalten können, was uns im Allgemeinen aber nicht interessiert. Wollen wir jedoch betonen, dass die Elemente einer Menge wiederum Mengen sind, die ihrerseits Elemente enthalten können, dann sprechen wir auch von einem Mengensystem und benutzen dafür meist Buchstaben der Form $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\ldots$ Die Elemente dieser Mengensysteme bezeichnen wir dann in der Regel wieder mit großen lateinischen Buchstaben, also $A \in \mathfrak{A}$, $A \in \mathfrak{B}$. Menge und Mengensystem sind also genau genommen Synonyme.

Axiom 4 (Vereinigungsmengenaxiom)**.**
Zu jedem Mengensystem $\mathfrak{C}$ existiert eine Menge V, welche alle Elemente enthält, die zu mindestens einer Menge des Systems $\mathfrak{C}$ gehören, d. h., falls $x \in A$ für ein $A \in \mathfrak{C}$, dann gilt $x \in V$.

Definition 1.5. Sei $\mathfrak{C}$ ein beliebiges Mengensystem und V eine Menge wie in Axiom 4. Die Menge

$$\bigcup_{A\in\mathfrak{C}} A := \{x \in V;\, \exists A \in \mathfrak{C} \text{ mit } x \in A\}$$

heißt die Vereinigung des Mengensystems $\mathfrak{C}$.

Aus der Definition der Vereinigung erhält man unmittelbar

$$x \in \bigcup_{A\in\mathfrak{C}} A \iff \exists A \in \mathfrak{C} \text{ mit } x \in A,$$

woraus insbesondere folgt, dass die Definition der Vereinigung unabhängig von der Wahl von V ist. Dies gilt im Übrigen auch im Folgenden bei ähnlichen Definitionen. Wenn das Mengensystem $\mathfrak{C}$ leer ist, dann ist die Vereinigung ebenfalls leer. Ist $\mathfrak{C} = \{A, B\}$, dann ersetzt man die obige Schreibweise durch $A \cup B$. Folglich ist

$$a \in A \cup B \iff a \in A \vee a \in B.$$

Lemma 1.6. *Seien A, B und C Mengen, dann gilt*

(*i*) $A \cup \emptyset = A$,

(*ii*) $A \cup B = B \cup A$ *(Kommutativität),*

(*iii*) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Assoziativität),*

(*iv*) $A \cup A = A$ *(Idempotenz),*

(*v*) $A \subset B \iff A \cup B = B$.

Definition 1.7. Sei $\mathfrak{C}$ ein nicht leeres Mengensystem und $B \in \mathfrak{C}$ beliebig. Die Menge

$$\bigcap_{A\in\mathfrak{C}} A := \{x \in B;\, \forall A \in \mathfrak{C} \text{ gilt } x \in A\}$$

heißt die Durchschnitt des Mengensystems $\mathfrak{C}$.

Nach Definition des Durchschnitts gilt

$$x \in \bigcap_{A\in\mathfrak{C}} A \iff \forall A \in \mathfrak{C} \text{ gilt } x \in A.$$

Die Voraussetzung $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ ist dabei ganz wesentlich, da anderenfalls keine Menge B existiert, die zur Anwendung des Aussonderungsaxioms in Definition 1.7 benötigt wird. Für $\mathfrak{C} = \{A, B\}$, benutzt man analog zur Vereinigung die Schreibweise $A \cap B$. Also ist

$$a \in A \cap B \iff a \in A \wedge a \in B.$$

Lemma 1.8. *Seien A, B und C Mengen, dann gilt*

(*i*) $A \cap \emptyset = \emptyset$,

(*ii*) $A \cap B = B \cap A$,

(*iii*) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

(iv) $A \cap A = A$,

(v) $A \subset B \iff A \cap B = A$.

Lemma 1.9. *Für beliebige Mengen A, B und C gelten die Distributivgesetze*

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Man kann Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze auch für die Vereinigung und den Durchschnitt beliebiger Mengensysteme formulieren. Als Beispiele seien hier angegeben

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{C}} A = \Big(\bigcup_{A \in \mathfrak{C}'} A\Big) \cup \Big(\bigcup_{A \in \mathfrak{C}''} A\Big) \qquad (\mathfrak{C} = \mathfrak{C}' \cup \mathfrak{C}''),$$
$$\Big(\bigcup_{A \in \mathfrak{C}} A\Big) \cap B = \bigcup_{A \in \mathfrak{C}} (A \cap B),$$
$$\Big(\bigcap_{A \in \mathfrak{C}} A\Big) \cup B = \bigcap_{A \in \mathfrak{C}} (A \cup B) \qquad (\mathfrak{C} \neq \emptyset).$$

Axiom 5 (Potenzmengenaxiom).
Zu jeder Menge A existiert eine Menge $\mathfrak{V}$, die alle Teilmengen von A als Elemente enthält, d. h., es gilt $B \subset A \implies B \in \mathfrak{V}$.

Definition 1.10. Ist A eine beliebige Menge und $\mathfrak{V}$ eine Menge wie in Axiom 5, dann ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(A)$ definiert durch

$$\mathfrak{P}(A) := \{B \in \mathfrak{V};\ B \subset A\}.$$

Aus der Definition der Potenzmenge folgt sofort $B \in \mathfrak{P}(A) \iff B \subset A$. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(A)$ einer Menge A enthält also alle Teilmengen von A und sonst nichts.

Lemma 1.11. *Für beliebige Mengen A, B, X und Y und jedes Mengensystem $\mathfrak{C}$ gilt*

(i) $\emptyset \in \mathfrak{P}(A)$,

(ii) $A \in \mathfrak{P}(A)$,

(iii) $A \subset B \implies \mathfrak{P}(A) \subset \mathfrak{P}(B)$,

(iv) $\mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) \subset \mathfrak{P}(X \cup Y), \quad \bigcup_{X \in \mathfrak{C}} \mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}\big(\bigcup_{X \in \mathfrak{C}} X\big)$,

(v) $\mathfrak{P}(X) \cap \mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}(X \cap Y), \quad \bigcap_{X \in \mathfrak{C}} \mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}\big(\bigcap_{X \in \mathfrak{C}} X\big) \quad (\mathfrak{C} \neq \emptyset)$.

Die in Lemma 1.11(iv) und (v) benutzten Symbole

$$\bigcup_{X \in \mathfrak{C}} \mathfrak{P}(X), \qquad \bigcap_{X \in \mathfrak{C}} \mathfrak{P}(X)$$

sind zwar ohne weitere Erklärung verständlich, man muss sich aber klarmachen, dass dadurch wirklich Mengen definiert werden, denn sie entsprechen nicht exakt den Definitionen 1.5 bzw. 1.7. Setzt man

$$\mathfrak{B} := \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\bigcup_{X\in\mathfrak{C}} X)),$$

dann gilt offensichtlich $\mathfrak{P}(X) \in \mathfrak{B}$ für alle $X \in \mathfrak{C}$. Weiter wird durch

$$\mathfrak{D} := \{Z \in \mathfrak{B};\ \exists X \in \mathfrak{C} \text{ mit } Z = \mathfrak{P}(X)\}$$

eine Menge mit der Eigenschaft

$$Z \in \mathfrak{D} \iff Z = \mathfrak{P}(X) \text{ für ein } X \in \mathfrak{C}$$

definiert. Nun setzt man

$$\bigcup_{X\in\mathfrak{C}} \mathfrak{P}(X) := \bigcup_{Z\in\mathfrak{D}} Z, \qquad \bigcap_{X\in\mathfrak{C}} \mathfrak{P}(X) := \bigcap_{Z\in\mathfrak{D}} Z,$$

und durch die Symbole auf der rechten Seite der Gleichungen werden nach den Definitionen 1.5 und 1.7 jeweils Mengen definiert.

Bei der Definition von Mengen mit Hilfe des Aussonderungsaxioms, werden wir die Schreibweise $\{A \in \mathfrak{P}(X);\ E(A)\}$ häufig durch $\{A \subset X;\ E(A)\}$ ersetzen.

Definition 1.12. Das Komplement $\complement_A B$ und die Differenz $A \setminus B$ der Mengen A und B sind definiert durch

$$\complement_A B \equiv A \setminus B := \{x \in A;\ x \notin B\}.$$

Auf Grund der Definition gilt

$$x \in \complement_A B \iff x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B.$$

$\complement_A B$ wird vorzugsweise im Falle $B \subset A$ benutzt. Manche Autoren definieren $\complement_A B$ sogar nur für diesen Fall.

Lemma 1.13. *a) Seien A, B und X Mengen, dann gilt*

(i) $\complement_X X = \emptyset,$

(ii) $\complement_X \emptyset = X,$

(iii) $A \subset B \iff \complement_X B \subset \complement_X A,$

(iv) $\complement_X A \cap A = \emptyset,$

(v) $\complement_X A \cup A = A \cup X,$

(vi) $\complement_X(\complement_X A) = A \cap X.$

b) Ist $A \subset X$, dann gilt

(i) $\complement_X A \cup A = X,$

(ii) $\complement_X(\complement_X A) = A.$

c) Sind A, B und X Mengen, und ist $\mathfrak{C}$ ein nicht leeres Mengensystem, dann gelten die De-Morgan-Regeln

(i) $\complement_X(A \cup B) = \complement_X A \cap \complement_X B, \quad \complement_X(\bigcup\limits_{A \in \mathfrak{C}} A) = \bigcap\limits_{A \in \mathfrak{C}} \complement_X A,$

(ii) $\complement_X(A \cap B) = \complement_X A \cup \complement_X B, \quad \complement_X(\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{C}} A) = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{C}} \complement_X A.$

Für die Symbole $\bigcup_{A \in \mathfrak{C}} \complement_X A$ und $\bigcap_{A \in \mathfrak{C}} \complement_X A$ muss man genau genommen dieselben Überlegungen durchführen wie im Anschluss an Lemma 1.11.

1.2 Kartesisches Produkt, Relationen, Abbildungen

Definition 1.14. Das geordnete Paar (x, y) mit x als erster und y als zweiter Koordinate ist definiert als die Menge

$$(x, y) := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}.$$

Lemma 1.15. *a) Sei $x \in X$ und $y \in Y$, dann ist*

$$(x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y)).$$

b) Die geordneten Paare (x, y) und (x', y') sind genau dann gleich, wenn $x = x'$ und $y = y'$.

Definition 1.16. Das kartesische Produkt $X \times Y$ der Mengen X und Y ist definiert durch

$$X \times Y := \{x \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \cup Y));\ x = (f, g), f \in X, g \in Y\}.$$

X und Y heißen Koordinatenmengen.

Wichtig für das Folgende ist nur Lemma 1.15b. Definition 1.14 und Lemma 1.15a kann man vergessen, sobald man Lemma 1.15b bewiesen und $X \times Y$ definiert hat.

Lemma 1.17. *Seien A, B, X und Y Mengen, dann gilt*

(i) $A = B \implies A \times B = B \times A,$

(ii) $A \subset X \wedge B \subset Y \implies A \times B \subset X \times Y,$

(iii) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset,$

(iv) $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X), \quad X \times (A \cup B) = (X \times A) \cup (X \times B),$

(v) $(A \cap B) \times X = (A \times X) \cap (B \times X), \quad X \times (A \cap B) = (X \times A) \cap (X \times B),$

(vi) $(A \setminus B) \times X = (A \times X) \setminus (B \times X), \quad X \times (A \setminus B) = (X \times A) \setminus (X \times B),$

(vii) $(A \cup B) \times (X \cup Y) \supset (A \times X) \cup (B \times Y),$

(viii) $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (B \times Y),$

(ix) *falls $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$, dann gelten die Umkehrungen zu (i) und (ii).*

Definition 1.18. Seien X und Y Mengen. Eine (zweistellige) Relation R zwischen X und Y (von X nach Y, in X nach Y) ist eine Teilmenge von $X \times Y$. Der Definitionsbereich (domain) $\operatorname{dom} R$ und der Wertebereich (range) $\operatorname{ran} R$ sind definiert als

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} R &:= \{x \in X;\ \exists y \in Y \text{ mit } (x,y) \in R\},\\ \operatorname{ran} R &:= \{y \in Y;\ \exists x \in X \text{ mit } (x,y) \in R\}.\end{aligned}$$

Ist $X = Y$ sprechen wir auch von einer Relation in X. $\operatorname{dom} R$ ist die Menge der ersten Koordinaten, $\operatorname{ran} R$ ist die Menge der zweiten Koordinaten. Ist $(x,y) \in R$, so schreibt man auch xRy und sagt: „x steht in Relation zu y“.

Beispiel 1.19. M = Männer, F = Frauen, V = Relation des Verheiratetseins, also

$$V := \{(x,y) \in M \times F;\ x \text{ ist verheiratet mit } y\}.$$

$\operatorname{dom} V$ = Ehemänner, $\operatorname{ran} V$ = Ehefrauen, xVy heißt „x ist verheiratet mit y“. Dabei ist zugelassen, dass ein Mann mehrere Frauen oder eine Frau mehrere Männer hat.

Beispiel 1.20. $X = Y$ beliebig, dann ist

$$R := \{(x,y) \in X \times Y;\ x = y\} = \{(x,y) \in X \times X;\ x = y\}$$

die Relation der Gleichheit oder Identitätsrelation, die mit I_X oder Id_X bezeichnet wird.

Beispiel 1.21. Für eine beliebige Menge X wird durch

$$R := \{(A,B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X);\ A \subset B\}$$

die Teilmengenrelation definiert.

Definition 1.22. a) Ist R eine Relation zwischen X und Y, dann heißt die Relation R^{-1} zwischen Y und X definiert durch

$$R^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X;\ (x,y) \in R\},$$

die Umkehrrelation zu R.
b) Sei R eine Relation zwischen X und Y und S eine Relation zwischen Y und Z. Die zusammengesetzte Relation $S \circ R$ zwischen X und Z ist definiert durch

$$S \circ R := \{(x,z) \in X \times Z;\ \exists y \in Y \text{ mit } (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}.$$

Lemma 1.23. *Sind R und S wie in Definition 1.22b, dann gilt*

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Definition 1.24. a) Eine Relation R in einer Menge X heißt

(i) reflexiv, falls xRx für alle $x \in X$ gilt,

(ii) symmetrisch, falls aus xRy stets yRx folgt,

(iii) antisymmetrisch, falls aus xRy und yRx stets $x = y$ folgt,

(iv) transitiv, falls aus xRy und yRz stets xRz folgt.

b) Eine Relation R in X heißt Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Ist R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X, dann heißt

$$[x] := \{y \in X;\, yRx\}$$

die Äquivalenzklasse von x, und x selbst heißt Repräsentant von $[x]$. Zwei Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ sind entweder gleich oder disjunkt und es gilt

$$[x] = [y] \iff xRy \iff y \in [x] \iff x \in [y].$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen nennt man die Quotientenmenge von X modulo R (kurz $X \bmod R$) und schreibt dafür X/R. Die Quotientenmenge bildet eine so genannte Zerlegung der Menge X. Dabei heißt ein Mengensystem $\mathcal{Z} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Zerlegung von X, wenn

(i) $Z \neq \emptyset$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$,

(ii) $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ für alle $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ mit $Z_1 \neq Z_2$,

(iii) $\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z = X$.

Ist umgekehrt $\mathcal{W}$ eine beliebige Zerlegung einer Menge X, dann wird durch

$$xSy \iff \exists W \in \mathcal{W} \text{ mit } x, y \in W$$

eine Äquivalenzrelation S auf X definiert mit $X/S = \mathcal{W}$.

Definition 1.25. Seien X und Y Mengen. T heißt Abbildung (Funktion, Operator, Transformation) von (auf) X nach (in) Y, falls

(i) T Relation zwischen X und Y ist,

(ii) $\operatorname{dom} T = X$,

(iii) $(f, g) \in T \wedge (f, g') \in T \implies g = g'$.

Für $(f, g) \in T$ schreibt man auch $T(f) = g$ oder $Tf = g$ und nennt g das Bild (den Funktionswert) von f unter der Abbildung T. Für „T ist Abbildung von X nach Y“ schreibt man kurz $T\colon X \to Y$.

Die Menge X heißt wegen $X = \operatorname{dom} T$ auch Definitionsbereich von T. Für Y ist in der Literatur kein einheitlicher Name gebräuchlich. Wir wollen Y als Zielbereich bezeichnen. Y ist nicht zu verwechseln mit dem Wertebereich $\operatorname{ran} T$. Es gilt im Allgemeinen nur $\operatorname{ran} T \subset Y$ und nicht $\operatorname{ran} T = Y$.

Beispiel 1.26. Ersetze in der Relation des Verheiratetseins (Beispiel 1.19) M durch EM = Ehemänner, dann ist

$$T = \{(x, y) \in EM \times F;\, x \text{ ist verheiratet mit } y\} = (EM \times F) \cap V$$

eine Relation zwischen EM und F mit $\operatorname{dom} T = EM$. Falls wir fordern, dass jeder Ehemann nur eine Frau hat, dann ist T eine Abbildung von EM nach F. Dabei ist eine Frau mit mehreren Männern zugelassen.

Beispiel 1.27. $X = Y$, $T = I_X =$ Identitätsrelation. I_X ist eine Abbildung von X in sich, die so genannte Identitätsabbildung auf X. $Y \supset X$ ist auch möglich, dann heißt I_X meist Inklusionsabbildung.

In Definition 1.25 ist die Menge X wegen $X = \operatorname{dom} T$ eindeutig bestimmt, für Y kann dagegen jede Menge Z mit $Z \supset \operatorname{ran} T$ gewählt werden. T aus Definition 1.25 ist also auch Abbildung von X nach Z, falls $Z \supset \operatorname{ran} T$. Diese Auffassung von Abbildung ist in der Literatur nicht einheitlich. Manche Autoren definieren Abbildung als Tripel (X, Y, T), d. h., die Abbildung wird durch die beiden Mengen X und Y sowie die Teilmenge $T \subset X \times Y$ bestimmt. Ändert man dann die Menge Y, erhält man eine neue Abbildung.

Definition 1.28. a) Ist $T\colon X \to Y$ und $A \subset X$, dann heißt $S := T \cap (A \times Y)$ die Restriktion von T auf A. Schreibweise $S = T|_A$.
b) Ist $S\colon A \to Y$ und $X \supset A$, dann heißt jede Abbildung $T\colon X \to Y$ mit $T|_A = S$ eine Fortsetzung von S auf X.

Die Restriktion einer Funktion ist eindeutig, die Fortsetzung nicht. Ist $S = T|_A$, dann gilt $Sf = Tf$ für alle $f \in A$.

Definition 1.29. Sei $T\colon X \to Y$. T heißt injektiv (eineindeutig, englisch „one-to-one“), falls aus $Tf = Tg$ folgt, dass $f = g$ ist. T heißt surjektiv auf Y (Abbildung *auf* Y, englisch „onto“), falls $\operatorname{ran} T = Y$. T heißt bijektiv von X auf Y, falls T injektiv und surjektiv auf Y ist.

Da nach unserer Definition einer Abbildung der Zielbereich Y nicht eindeutig bestimmt ist, muss bei „surjektiv“ und „bijektiv“ immer angegeben werden, welcher Zielbereich zu Grunde gelegt wird, sofern dies nicht aus dem Zusammenhang klar ist. Wenn wir im Folgenden bei einer Abbildung $T\colon X \to Y$ von surjektiv oder bijektiv sprechen, ist dies immer bezüglich Y zu verstehen.

Definition 1.30. Sei $T\colon X \to Y$ und $A \subset X$, $B \subset Y$. Die Menge

$$T(A) := \{g \in Y;\ \exists f \in A \text{ mit } Tf = g\}$$

heißt Bild von A unter T. Die Menge

$$T^{-1}(B) := \{x \in X;\ \exists y \in B \text{ mit } Tx = y\}$$

heißt Urbild von B unter T.

Die Schreibweise $T(A)$ ist leider nicht eindeutig. Sind etwa $X = \big\{a, b, \{a, b\}\big\}$ und $Y = \{a, b\}$ gegeben, dann ist T, definiert durch

$$T := \big\{(a, a), (b, b), (\{a, b\}, a)\big\} \subset X \times Y,$$

eine Abbildung von X nach Y, und speziell ist nach Definition 1.25 das Bild (der Funktionswert) von $\{a, b\}$ unter T gegeben durch $T(\{a, b\}) = a$. Nun ist aber $\{a, b\}$ auch Teilmenge von X, und $T(\{a, b\})$ kann ebenfalls nach Definition 1.30 gebildet werden. In diesem Sinne ist dann $T(\{a, b\}) = \{a, b\}$. Entsprechendes gilt für T^{-1}, denn das Symbol T^{-1} wird auch zur Bezeichnung der Umkehrabbildung (vgl. Definition 1.35) benutzt. Die beiden Begriffe „Urbild“ und „Umkehrabbildung“ müssen jedoch sorgfältig unterschieden werden.

Lemma 1.31. *Seien X und Y Mengen, $T\colon X \to Y$ und $A, A' \subset X$, dann gilt*

(i) $T(X) = \operatorname{ran} T$,

(ii) $T(A) = \emptyset \iff A = \emptyset$,

(iii) $A \subset A' \implies T(A) \subset T(A')$,

(iv) $T(A \cup A') = T(A) \cup T(A')$,

(v) $T(A \cap A') \subset T(A) \cap T(A')$,

(vi) $T(A \setminus A') \supset T(A) \setminus T(A')$,

(vii) $T(\complement_X A) \supset \complement_Y(T(A)) \cap T(X)$.

Lemma 1.32. *Seien X und Y Mengen, $T\colon X \to Y$ und $B, B' \subset Y$, dann gilt*

(i) $T^{-1}(Y) = X$,

(ii) $T^{-1}(B) = \emptyset \iff B \cap T(X) = \emptyset$,

(iii) $B \subset B' \implies T^{-1}(B) \subset T^{-1}(B')$,

(iv) $T^{-1}(B \cup B') = T^{-1}(B) \cup T^{-1}(B')$,

(v) $T^{-1}(B \cap B') = T^{-1}(B) \cap T^{-1}(B')$,

(vi) $T^{-1}(B \setminus B') = T^{-1}(B) \setminus T^{-1}(B')$,

(vii) $T^{-1}(\complement_Y B) = \complement_X(T^{-1}(B))$.

Die Aussagen (iv) und (v) von Lemma 1.31 und Lemma 1.32 gelten analog für Mengensysteme (Mengenfamilien, vgl. Abschnitt 1.4). In Lemma 1.31(v)–(vii) gilt im Allgemeinen nicht die Gleichheit.

Lemma 1.33. *Seien X und Y Mengen, $T\colon X \to Y$, $A \subset X$ und $B \subset Y$, dann gilt*

(i) $T(T^{-1}(B)) = B \cap T(X) \subset B$,

(ii) $A \subset T^{-1}(T(A))$.

Lemma 1.34. *a) Ist $T\colon X \to Y$ bijektiv von X auf Y, dann ist die Umkehrrelation T^{-1} eine Abbildung von Y nach X, also $T^{-1}\colon Y \to X$.*
b) Ist $T\colon X \to Y$ bijektiv von X auf Y, dann ist $T^{-1}\colon Y \to X$ bijektiv von Y auf X, und es gilt $(T^{-1})^{-1} = T$.

Definition 1.35. Ist $T\colon X \to Y$ bijektiv, dann heißt T^{-1} aus Lemma 1.34 die Umkehrabbildung (Umkehrfunktion, usw.) zu T.

Lemma 1.36. *Sei $T\colon X \to Y$. Äquivalent sind*

(i) *T ist surjektiv (Abbildung* auf *Y),*

(ii) $T(\complement_X A) \supset \complement_Y(T(A)) \qquad (A \subset X)$,

(iii) $T(T^{-1}(B)) = B \qquad (B \subset Y)$.

Lemma 1.37. *Sei $T\colon X \to Y$. Äquivalent sind*

(i) *T ist injektiv,*

(ii) $T(A \cap B) = T(A) \cap T(B) \qquad (A, B \subset X)$,

(iii) $T^{-1}(T(A)) = A \qquad (A \subset X)$,

(iv) $T(A \setminus B) = T(A) \setminus T(B) \qquad (A, B \subset X)$.

Die Zusammensetzung von Abbildungen $T\colon X \to Y$ und $S\colon Y \to Z$ ist ein Spezialfall von Definition 1.22b.

Lemma 1.38. *Seien $T\colon X \to Y$, $S\colon Y \to Z$, $R\colon Z \to W$, $A \subset X$ und $B \subset Z$, dann gilt*

(i) $(S \circ T)\colon X \to Z$,

(ii) $(S \circ T)(A) = S(T(A))$,

(iii) $(S \circ T)^{-1}(B) = T^{-1}(S^{-1}(B))$,

(iv) *S und T injektiv $\implies$ $S \circ T$ injektiv,*

(v) *S und T surjektiv $\implies$ $S \circ T$ surjektiv,*

(vi) *$S \circ T$ injektiv $\implies$ T injektiv,*

(vii) *$S \circ T$ surjektiv $\implies$ S surjektiv,*

(viii) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

Lemma 1.39. *a) Ist $T\colon X \to Y$ und $S\colon Y \to X$ mit $S \circ T = I_X$, dann ist T injektiv und S surjektiv.*
b) $T\colon X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $S\colon Y \to X$ existiert mit

$$S \circ T = I_X \qquad \text{und} \qquad T \circ S = I_Y.$$

In diesem Fall ist $S = T^{-1}$ und $S^{-1} = T$.
c) Ist $T\colon X \to Y$ bijektiv und T^{-1} die Umkehrabbildung aus Definition 1.35, dann ist $T^{-1} \circ T = I_X$ und $T \circ T^{-1} = I_Y$, d. h., es gilt $(T^{-1} \circ T)f = f$ für alle $f \in X$ und $(T \circ T^{-1})g = g$ für alle $g \in Y$.

Definition 1.40. Seien X und Y Mengen, dann ist

$$Y^X := \{T \subset X \times Y;\, T \text{ ist Abbildung von } X \text{ nach } Y\}$$

die Menge aller Abbildungen von X nach Y.

1.3 Zahlen

Definition 1.41. Für eine Menge x heißt

$$x^+ := x \cup \{x\}$$

der Nachfolger von x. Eine Menge, die $\emptyset$ enthält und mit jedem Element x auch dessen Nachfolger x^+, heißt eine Nachfolgermenge.

Um sicherzustellen, dass es überhaupt eine Nachfolgermenge gibt, benötigen wir ein weiteres Axiom.

Axiom 6 (Unendlichkeitsaxiom)**.** *Es existiert eine Nachfolgermenge, d. h., es existiert eine Menge, die $\emptyset$ enthält und mit jedem Element x auch dessen Nachfolger x^+.*

Definition 1.42. Sei N eine beliebige Nachfolgermenge, und sei $\mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(N)$ definiert durch $\mathcal{N} := \{A \subset N;\ A \text{ ist Nachfolgermenge}\}$, dann heißt

$$\mathbb{N}_0 := \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A$$

die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der Null).

Die Definition von $\mathbb{N}_0$ ist unabhängig von der speziellen Wahl von N. Dazu beachte man, dass der Durchschnitt von Nachfolgermengen wiederum eine Nachfolgermenge ist. Bildet man nun ausgehend von einer Nachfolgermenge N' analog zur Definition von $\mathbb{N}_0$ die Menge $\mathbb{N}_0'$, dann ist $\mathbb{N}_0' \cap N \in \mathcal{N}$ und

$$\mathbb{N}_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A \subset \mathbb{N}_0' \cap N \subset \mathbb{N}_0'.$$

Vertauscht man in dieser Argumentation die Rollen von $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0'$, so folgt $\mathbb{N}_0' \subset \mathbb{N}_0$, also insgesamt $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0'$.

$\mathbb{N}_0$ ist natürlich ebenfalls eine Nachfolgermenge und für jede Nachfolgermenge M gilt

$$\mathbb{N}_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A \subset M \cap N \subset M.$$

Wir haben also $\mathbb{N}_0 \subset M$ für jede Nachfolgermenge M, und $\mathbb{N}_0$ ist die einzige Nachfolgermenge mit dieser Eigenschaft.

Setzt man zur Abkürzung

$$0 := \emptyset, \quad 1 := 0^+ = \{0\}, \quad 2 := 1^+ = \{0, 1\}, \quad 3 := 2^+ = \{0, 1, 2\}, \tag{1.1}$$

dann enthält $\mathbb{N}_0$ insbesondere die Zahlen $0, 1, 2, 3$. Anschaulich enthält jedes Element von $\mathbb{N}_0$ so viele Elemente, wie sein Zahlenwert angibt.

Wie wir oben gesehen haben, ist $\mathbb{N}_0$ die einzige Nachfolgermenge, die in jeder Nachfolgermenge als Teilmenge enthalten ist. Diese Minimaleigenschaft beinhaltet das Prinzip der vollständigen Induktion, das wir jetzt formulieren.

Satz 1.43. *Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $0 \in M$,

(ii) $n \in M \implies n^+ \in M$.

Dann ist $M = \mathbb{N}_0$.

Beweis. Bedingungen (i) und (ii) implizieren, dass M eine Nachfolgermenge ist. Wegen der Minimalität von $\mathbb{N}_0$ gilt deshalb $\mathbb{N}_0 \subset M$. Nach Voraussetzung ist aber auch $M \subset \mathbb{N}_0$ und es folgt $M = \mathbb{N}_0$. □

Definition 1.44. Eine Menge A heißt transitiv, wenn aus $x \in A$ stets $x \subset A$ folgt.

Transitivität kann äquivalent durch

$$x \in y \wedge y \in A \implies x \in A$$

charakterisiert werden. In dieser Form wird der Grund für die Bezeichnung *transitiv* deutlicher.

Als erste Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion (Satz 1.43) beweisen wir nun

Lemma 1.45. *Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist transitiv.*

Beweis. Sei M die Menge aller transitiven natürlichen Zahlen, also $M := \{n \in \mathbb{N}_0; x \in n \implies x \subset n\}$. Wir zeigen, dass M die Bedingungen (i) und (ii) aus Satz 1.43 erfüllt, denn dann folgt $M = \mathbb{N}_0$, d. h. jede natürliche Zahl ist transitiv.

Zu (i): Offensichtlich ist 0 transitiv, denn wenn nicht, müsste es ein $x \in 0$ mit $x \not\subset 0$ geben. Dies ist aber wegen $0 = \emptyset$ nicht möglich.

Zu (ii): Nun nehmen wir $n \in M$ an und zeigen $n^+ \in M$. Für $x \in n^+ = n \cup \{n\}$ ist $x \in n$ oder $x = n$. Wegen $n \in M$ folgt im ersten Fall $x \subset n$, und im zweiten Fall gilt trivialer Weise ebenfalls $x \subset n$. Wir haben deshalb in jedem Fall $x \subset n \subset n^+$, d. h. $n^+ \in M$. □

Im nächsten Satz sind alle für das Folgende wesentlichen Eigenschaften von $\mathbb{N}_0$ zusammengefasst.

Satz 1.46. *Die Menge $\mathbb{N}_0$ hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) $0 \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $n \in \mathbb{N}_0 \implies n^+ \in \mathbb{N}_0$,

(iii) $n^+ \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$,

(iv) $n, m \in \mathbb{N}_0 \wedge n^+ = m^+ \implies n = m$,

(v) *Ist $M \subset \mathbb{N}_0$ mit $0 \in M$ sowie $(n \in M \implies n^+ \in M)$, dann ist $M = \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Aussagen (i) und (ii) sind unmittelbar klar, da $\mathbb{N}_0$ eine Nachfolgermenge ist. Wegen $n^+ = n \cup \{n\}$ ist $n \in n^+$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d. h. $n^+ \neq \emptyset = 0$, womit auch (iii) bewiesen ist. (v) ist die Aussage von Satz 1.43.

Zum Beweis von (iv) seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m^+ = n^+$. Nun ist $n \in n^+$, also auch $n \in m^+$, und daraus folgt $n \in m$ oder $n = m$. Mit denselben Argumenten erhält man umgekehrt $m \in n$ oder $m = n$. Wäre jetzt $m \neq n$, dann müsste sowohl $n \in m$ als auch $m \in n$ gelten, und da m und n transitiv sind (Lemma 1.45), folgt $n \subset m$ und $m \subset n$, d. h. $m = n$. Wir haben also den Widerspruch $m \neq n \implies m = n$ und deshalb muss $m = n$ gelten. □

Die Aussagen von Satz 1.46 sind auch als Peano-Axiome bekannt. Bei unserer Konstruktion von $\mathbb{N}_0$ sind sie jedoch keine Axiome, sondern aus der Definition von $\mathbb{N}_0$ beweisbar. Man kann den Satz auch für die Menge $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ formulieren. Dabei hat man nur überall 0 durch 1 zu ersetzen.

1.4 Kartesisches Produkt von Mengenfamilien

Manchmal interessiert man sich bei einer Abbildung T nicht so sehr für den Definitionsbereich und die Zuordnung $f \mapsto Tf$, sondern nur für die Bildpunkte Tf. Man benutzt dann häufig eine andere Schreib- und Sprechweise. Seien z. B. J und A Mengen, dann heißt eine Abbildung $T\colon J \to A$ auch Familie oder Indizierung von $\operatorname{ran} T$ und J nennt man in diesem Fall meistens Indexmenge. Für $T(\alpha) = a$ schreibt man auch a_α und für die gesamte Abbildung $(a_\alpha)_{\alpha \in J}$. Die Abbildung T braucht nicht injektiv zu sein. Zu jeder Menge A existiert eine Indizierung. Man braucht nur $J = A$ und $T = I_A$ zu wählen. In diesem Sinne kann jede Menge als Familie aufgefasst werden. Dies macht man insbesondere bei Mengensystemen $\mathfrak{C}$, spricht dann von Mengenfamilien $\mathfrak{C}$ und schreibt z. B.

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{C}} A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha, \qquad \bigcap_{A \in \mathfrak{C}} A = \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha.$$

Eine Familie mit Indexmenge $\mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{N}$ heißt auch Folge. Für Folgen von Mengen benutzt man speziell die Schreibweisen

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Ähnliche Schreibweisen verwendet man, wenn $J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ oder $J = \mathbb{Z}$ ist (auch wenn wir diese Mengen im Augenblick noch gar nicht kennen).

Die Definition des geordneten Paares (Definition 1.14) und des kartesischen Produktes (Definition 1.16) könnte man induktiv auf endlich[1] viele Koordinaten ausdehnen, etwa durch

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) := ((a_0, a_1, \dots, a_{n-1}), a_n),$$
$$A_0 \times A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n := ((A_0 \times A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n).$$

Da sich diese Definitionen aber nicht auf unendlich viele Koordinaten verallgemeinern lassen, werden wir hier anders vorgehen. Dazu versuchen wir zunächst einmal das kartesische Produkt $A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n \times \cdots$ einer Folge von Mengen $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ zu definieren. Dieses Produkt müsste aus allen Objekten der Form $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ mit $a_j \in A_j$ bestehen. Die Frage ist natürlich, was man unter den obigen Objekten versteht. Es liegt nahe $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ als Folge aufzufassen. Das Produkt $A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n \times \cdots$ wäre dann die Menge aller Folgen $(a_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_j \in A_j$. Beachtet man nun noch, dass eine Folge ein Spezialfall einer Funktion ist, dann kommt man zu folgender Definition.

Definition 1.47. Sei $(X_\alpha)_{\alpha \in J}$ eine Mengenfamilie. Das kartesische Produkt

$$\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$$

[1]Wir benutzen hier die Begriffe *endlich* und *unendlich* rein intuitiv. Die genauen Definitionen folgen in Kapitel 2.

ist definiert als die Menge aller Funktionen

$$c\colon J \to \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha \text{ mit } c(\alpha) \in X_\alpha \qquad (\alpha \in J).$$

X_α heißt Koordinatenmenge zum Index α und die Abbildung

$$P_\beta\colon \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta \text{ mit } P_\beta(c) = c(\beta) \qquad (c \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha)$$

heißt Projektion auf die Koordinatenmenge zum Index β.

Besteht die Mengenfamilie aus den Elementen X_a und X_b, dann können wir das kartesische Produkt nach Definition 1.16 und nach Definition 1.47 bilden, also

$$P := X_a \times X_b \text{ und } Q := \prod_{j \in \{a,b\}} X_j.$$

Genau genommen müsste man diese beiden Formen des kartesischen Produktes unterscheiden, da P geordnete Paare enthält, Q aber Funktionen von $\{a, b\}$ nach $X_a \cup X_b$. Es existiert jedoch eine bijektive Abbildung S von P auf Q, nämlich $S((x, y)) = c$, wobei c die Funktion aus Q ist, die durch $c(a) = x$ und $c(b) = y$ definiert ist. Auf Grund dieser Abbildung kann man nahezu alle Aussagen, die für P gelten, auch für Q beweisen und umgekehrt. Deshalb identifiziert man die beiden Formen des kartesischen Produktes in der Regel miteinander.

Für das kartesische Produkt endlich vieler Mengen $X_0, X_1 \dots, X_n$ schreibt man in Analogie zum Fall $n = 2$ auch $X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_n$ und für die zugehörigen Elemente $(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Lemma 1.48. *Ist $(X_\alpha)_{\alpha \in J}$, $J \neq \emptyset$, eine Familie von Mengen, dann gilt*

$$\prod_{\alpha \in J} X_\alpha \neq \emptyset \implies X_\alpha \neq \emptyset \ \forall \alpha \in J.$$

Axiom 7 (Auswahlaxiom)**.** *Das kartesische Produkt einer nicht leeren Familie nicht leerer Mengen ist nicht leer, d. h.,*

$$J \neq \emptyset \wedge X_\alpha \neq \emptyset \ \forall \alpha \in J \implies \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \neq \emptyset.$$

Das Auswahlaxiom liefert die Umkehrung zu Lemma 1.48. Es war lange Zeit ein offenes Problem, ob das Auswahlaxiom unabhängig von den übrigen Axiomen der Mengenlehre ist oder ob man seine Aussage aus diesen herleiten kann. Für endliche Familien nicht leerer Mengen kann man nämlich ohne Benutzung des Auswahlaxioms leicht beweisen, dass das kartesische Produkt nicht leer ist (vgl. Lemma 1.17(iii)), und somit lag die Vermutung nahe, dass auch für unendliche Mengenfamilien ein derartiger Beweis möglich sei. Diese Vermutung wurde erst 1963 von P. J. Cohen widerlegt, der die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von den übrigen Axiomen zeigte. Zuvor hatte K. Gödel schon 1935 gezeigt, dass das Auswahlaxiom nicht im Widerspruch zu den übrigen Axiomen der Mengenlehre steht.

Es gibt viele äquivalente Formulierungen des Auswahlaxioms, von denen wir im Folgenden einige angeben. Zunächst einige mehr oder weniger triviale Umformulierungen. (Siehe hierzu z. B. [3, Chapter I.9], [7, Kapitel 15], [9, Chapter 0].)

Kurt Gödel
geb. 28.4.1906 in Brünn
gest. 14.1.1978 in Princeton

Paul Joseph Cohen
geb. 2.4.1934 in Long Branch

Äquivalente Formulierungen des Auswahlaxioms. *a) Ist $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ ein Mengensystem paarweise disjunkter, nicht leerer Mengen, dann existiert eine Menge S, die aus jedem $A \in \mathfrak{C}$ genau ein Element enthält.*

b) Jede Äquivalenzrelation besitzt ein Repräsentantensystem, d. h., ist R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge $X \neq \emptyset$, dann existiert eine Teilmenge $S \subset X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält.

c) Ist $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ ein Mengensystem nicht leerer Mengen, dann existiert eine Menge S, die aus jedem $A \in \mathfrak{C}$ (mindestens) ein Element enthält.

d) Zu jeder Menge $X \neq \emptyset$ existiert eine Funktion $\varphi\colon \mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ mit $\varphi(A) \in A$ für jedes $A \subset X$, $A \neq \emptyset$.

Bemerkung 1.49. Die Funktion φ in Formulierung d) wählt also aus jeder nicht leeren Teilmenge $A \subset X$ ein Element $\varphi(A) \in A$ aus. Sie heißt deshalb auch Auswahlfunktion für X.

Lemma 1.50. *Ist $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ eine Familie nicht leerer Mengen, dann sind die Projektionen P_α, $\alpha \in J$, Abbildungen auf A_α.*

Lemma 1.51. *Sind $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ und $(B_\alpha)_{\alpha\in J}$ Mengenfamilien, dann gilt*

$$A_\alpha \subset B_\alpha \ \forall \alpha \in J \implies \prod_{\alpha\in J} A_\alpha \subset \prod_{\alpha\in J} B_\alpha.$$

Ist außerdem $A_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in J$, dann gilt auch die Umkehrung.

Lemma 1.52. *Sind $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ und $(B_\alpha)_{\alpha\in J}$ Mengenfamilien, dann gilt*

(i) $\displaystyle\prod_{\alpha\in J} A_\alpha \cap \prod_{\alpha\in J} B_\alpha = \prod_{\alpha\in J} (A_\alpha \cap B_\alpha)$,

(ii) $\displaystyle\prod_{\alpha\in J} A_\alpha \cup \prod_{\alpha\in J} B_\alpha \subset \prod_{\alpha\in J} (A_\alpha \cup B_\alpha)$.

Lemma 1.53. *Seien $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$, $(Y_\alpha)_{\alpha\in J}$ Mengenfamilien mit $A_\alpha \subset Y_\alpha$ für alle $\alpha \in J$, und sei $Y := \prod_{\alpha\in J} Y_\alpha$, dann gilt für die Projektionen $P_\alpha\colon Y \to Y_\alpha$, $\alpha \in J$,*

(i) $$P_\alpha^{-1}(A_\alpha) = \prod_{\beta\in J} B_{\alpha,\beta}, \quad B_{\alpha,\beta} := \begin{cases} A_\alpha, & \beta = \alpha \\ Y_\beta, & \beta \neq \alpha, \end{cases}$$

(ii) $$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in J} P_\alpha^{-1}(A_\alpha),$$

(iii) $$\complement_Y\big(P_\alpha^{-1}(A_\alpha)\big) = P_\alpha^{-1}\big(\complement_{Y_\alpha} A_\alpha\big),$$

(iv) $$\complement_Y\Big(\prod_{\alpha\in J} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in J} \complement_Y\big(P_\alpha^{-1}(A_\alpha)\big).$$

1.5 Ordnungsrelationen, Lemma von Zorn

Definition 1.54. Eine Relation R in einer Menge X heißt Halbordnung auf X (Teilordnung, partielle Ordnung, Ordnung), falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist (vgl. Definition 1.24a). Die Menge X heißt dann durch R halbgeordnet (teilweise geordnet, partiell geordnet, geordnet).

Für eine Halbordnung benutzt man häufig die Symbole $\preceq$ oder $\leq$. $f \preceq g$ wird dann als „f ist kleiner oder gleich g“ oder „f liegt vor g“ gelesen. Anstelle von $f \preceq g$ wird auch $g \succeq f$ („g ist größer oder gleich f“, „g liegt hinter f“) benutzt.

Bemerkung 1.55. Aufgrund der Definition gilt also für jede Halbordnung $\preceq$ auf einer Menge X und alle $x, y, z \in X$

(i) $x \preceq x$,

(ii) $x \preceq y \land y \preceq x \implies x = y$,

(iii) $x \preceq y \land y \preceq z \implies x \preceq z$.

Definition 1.56. Sei $\preceq$ eine Halbordnung auf einer Menge X.
a) Ein Element $f \in X$ heißt erstes (kleinstes) Element von X, falls $f \preceq g$ für alle $g \in X$ gilt. Ein Element $f \in X$ heißt letztes (größtes) Element von X, falls $g \preceq f$ für alle $g \in X$ gilt.

b) Ein Element $f \in X$ heißt minimal, falls aus $g \in X$ und $g \preceq f$ stets $g = f$ folgt. Ein Element $f \in X$ heißt maximal, falls aus $g \in X$ und $f \preceq g$ stets $g = f$ folgt.

c) Ein Element $f \in X$ heißt untere Schranke für $A \subset X$, wenn $f \preceq g$ für alle $g \in A$ gilt. Ein Element $f \in X$ heißt obere Schranke für $A \subset X$, wenn $g \preceq f$ für alle $g \in A$ gilt.

d) Ein Element $f \in X$ heißt Infimum (größte untere Schranke) für $A \subset X$, wenn f untere Schranke für A ist, und für jede weitere untere Schranke f' von A gilt $f' \preceq f$. Ein Element $f \in X$ heißt Supremum (kleinste obere Schranke) für $A \subset X$, wenn f obere Schranke für A ist, und für jede weitere obere Schranke f' von A gilt $f \preceq f'$.

Das erste (letzte) Element einer Menge ist, sofern es existiert, eindeutig bestimmt. Dagegen kann eine Menge mehrere minimale (maximale) Elemente besitzen. Ist f erstes (letztes) Element einer Menge X, dann ist es gleichzeitig das einzige minimale (maximale) Element von X. Das Infimum einer Menge A ist das letzte Element der Menge aller unteren Schranken von A. Natürlich braucht eine Menge A kein Infimum zu besitzen, denn die Menge aller unteren Schranken von A braucht kein letztes Element zu haben. Dies gilt insbesondere, wenn A überhaupt keine untere Schranke besitzt. Entsprechend ist das Supremum von A das erste Element der Menge der oberen Schranken von A.

Beispiel 1.57. Sei $Y \neq \emptyset$ eine Menge mit mehr als einem Element und $X \subset \mathfrak{P}(Y)$, dann wird auf X durch die Teilmengenrelation $\subset$ eine Halbordnung definiert. Ist speziell $X = \mathfrak{P}(Y)$, dann ist $\emptyset$ erstes und minimales Element von X, und Y ist letztes und maximales Element von X. Wählt man dagegen $X = \mathfrak{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$, dann sind sämtliche einelementigen Teilmengen von Y minimale Elemente von X, aber X besitzt kein erstes Element. Y ist nach wie vor letztes und maximales Element von X.

Definition 1.58. Ist $\preceq$ eine Halbordnung auf einer Menge X, dann heißt die Relation $\prec$, definiert durch

$$x \prec y \;:\Longleftrightarrow\; x \preceq y \wedge x \neq y$$

die zu $\preceq$ gehörende strenge Halbordnung auf X.

Lemma 1.59. *Eine strenge Halbordnung $\prec$ auf X hat die Eigenschaften*

(i) *Für alle $x, y \in X$ gilt höchstens eine der Beziehungen*

$$x \prec y, \quad x = y, \quad y \prec x.$$

(ii) *$\prec$ ist transitiv.*

Bemerkung 1.60. Ist umgekehrt eine Relation $\prec$ auf X gegeben, die (i) und (ii) von Lemma 1.59 erfüllt, dann wird durch

$$x \preceq y \;:\Longleftrightarrow\; x \prec y \vee x = y$$

eine Halbordnung im Sinne von Definition 1.54 auf X definiert. Man kann also zu einer Halbordnung $\preceq$ eine strenge Halbordnung $\prec$ definieren oder von eine strengen Halbordnung $\prec$ zu einer (schwachen) Halbordnung $\preceq$ übergehen. Viele Autoren definieren deshalb auch Halbordnung im Sinne von strenger Halbordnung.

Definition 1.61. Eine Halbordnung $\preceq$ auf einer Menge X heißt totale Ordnung (vollständige Ordnung, lineare Ordnung, Ordnung), falls für alle $f, g \in X$ mindestens eine der Relationen $f \preceq g$ oder $g \preceq f$ erfüllt ist. X heißt dann durch $\preceq$ total geordnet (vollständig geordnet usw.).

Bei einer total geordneten Menge sind die Begriffe erstes und minimales Element sowie letztes und maximales Element äquivalent. Es gilt nämlich

Lemma 1.62. *Ist $\preceq$ eine totale Ordnung auf einer Menge X, dann gilt:*

(i) *f ist genau dann erstes Element von X, wenn f minimales Element ist.*

(ii) *f ist genau dann letztes Element von X, wenn f maximales Element ist.*

Ist $\prec$ die zu $\preceq$ gehörende strenge Ordnung, dann gilt das so genannte Trichotomiegesetz

(iii) Für alle $x, y \in X$ gilt genau eine der Beziehungen

$$x \prec y, \quad x = y, \quad y \prec x.$$

Definition 1.63. Sei $\preceq$ eine Halbordnung auf einer Menge X. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt eine Kette in X, falls $\preceq \cap (A \times A)$ eine totale Ordnung auf A ist, d. h., wenn A mit der von X übernommenen Ordnung eine total geordnete Menge ist.

Beispiel 1.64. $X = \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ versehen mit der Teilmengenrelation $\subset$. $A := \{(-a, a) \subset \mathbb{R}; a > 0\}$ ist eine Kette in $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

Lemma 1.65 (M. Zorn, 1935). *Sei $X \neq \emptyset$ eine halbgeordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede Kette in X eine obere Schranke besitzt, dann besitzt X ein maximales Element.*

Kazimierz Kuratowski
geb. 2.2.1896 in Warschau
gest. 18.6.1980 in Warschau

Max Zorn
geb. 6.6.1906 in Deutschland
gest. 9.3.1993

Im Lemma von Zorn, das im Wesentlichen schon von K. Kuratowski, 1922, bewiesen wurde, wird nicht verlangt, dass die obere Schranke jeder Kette $A \subset X$ ebenfalls zu A gehört. Dieses Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom (Axiom 7). Dasselbe gilt für das folgende Hausdorff'sche Maximalitätsprinzip und den so genannten Wohlordnungssatz von Zermelo (siehe [3, Chapter II.2], [7, Kapitel 16, 17], [9, Chapter 0]).

Hausdorff'sches Maximalitätsprinzip. *Jede Kette $\mathfrak{K}_0$ in einer geordneten Menge X ist in einer maximalen Kette $\mathfrak{K}$ in X enthalten. Dabei heißt die Kette $\mathfrak{K}$ maximal, wenn für jede Kette $\mathfrak{K}^*$ in X mit $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}^*$ folgt, dass $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^*$ gilt ($\mathfrak{K}$ ist also maximal bezüglich der Halbordnung $\subset$ auf $\mathfrak{P}(X)$ im Sinne von Definition 1.56b).*

Definition 1.66. Eine Menge heißt wohlgeordnet, wenn jede ihrer nicht leeren Teilmengen ein erstes Element besitzt.

Beispiel 1.67. Die übliche $\leq$-Relation auf $\mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{N}$, die wir in Kapitel 2 einführen werden, ist eine Wohlordnung.

Felix Hausdorff
geb. 8.11.1869 in Breslau
gest. 26.1.1942 in Bonn

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo
geb. 27.7.1871 in Berlin
gest. 21.5.1953 in Freiburg im Breisgau

Satz 1.68 (Wohlordnungssatz von E. Zermelo, 1904)**.** *Jede Menge kann wohlgeordnet werden.*

Satz 1.68 sagt nicht, dass jede Halbordnung eine Wohlordnung ist, sondern nur, dass es zu jeder Menge X eine Halbordnung gibt, so dass X mit dieser Halbordnung eine wohlgeordnete Menge ist. Dies ist eine reine Existenzaussage. Es ist im Allgemeinen nicht bekannt, wie man ein solche Wohlordnung finden kann.

Aus dem Auswahlaxiom oder den dazu äquivalenten Formulierungen und Sätzen folgen eine Reihe fundamentaler Sätze aus den verschiedensten Bereichen der Mathematik. Als Beispiele seien hier genannt:

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Satz von Hahn-Banach über die Fortsetzung beschränkter linearer Funktionale.

Satz von Vitali über die Existenz nicht Lebesgue-messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Satz von Tychonoff über das Produkt quasikompakter topologischer Räume.

Satz über die Existenz maximaler Ideale.

1.6 Mächtigkeit von Mengen

Definition 1.69. a) Zwei Mengen X und Y heißen gleich mächtig, wenn eine bijektive Abbildung von X auf Y existiert. (Schreibweise $X \sim Y$ oder $X \simeq Y$)

b) Ein Menge Y heißt mindestens so mächtig wie eine Menge X, wenn eine bijektive Abbildung von X auf eine Teilmenge von Y existiert, d. h. wenn eine injektive Abbildung von X nach Y existiert. Man sagt auch „Y ist mächtiger als X" oder „X ist weniger mächtig als Y". (Schreibweise $X \preceq Y$ oder $Y \succeq X$)

In Definition 1.69b) ist zugelassen, dass X und Y gleich mächtig sind. Will man ausdrücken, dass Y mindestens so mächtig wie X ist, aber X und Y nicht gleich mächtig sind, so sagt man „Y ist echt mächtiger als X" und schreibt $X \prec Y$ oder $Y \succ X$. Die folgenden Eigenschaften von $\preceq$ sind unmittelbar einsichtig.

Lemma 1.70. *Für beliebige Mengen X, Y, Z gilt*

(i) $X \preceq X$,

(ii) $X \preceq Y \wedge Y \preceq Z \implies X \preceq Y$,

(iii) $X \subset Y \implies X \preceq Y$,

(iv) $X \sim Y \implies X \preceq Y \wedge Y \preceq X$.

Als nächstes beweisen wir eine nützliche Charakterisierung von $\preceq$ mittels surjektiver Abbildungen.

Lemma 1.71. *Für zwei Mengen A, B gilt $A \preceq B$ genau dann, wenn eine surjektive Abbildung von B auf A existiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $A \preceq B$, dann existiert eine injektive Abbildung $\varphi\colon A \to B$. Wähle nun $a \in A$ beliebig und definiere $\psi\colon B \to A$ durch

$$\psi(x) := \begin{cases} \varphi^{-1}(x), & x \in \varphi(A) \\ a, & x \in B \setminus \varphi(A), \end{cases}$$

dann ist ψ surjektiv.

„$\Longleftarrow$“: Sei umgekehrt $\psi\colon B \to A$ surjektiv. Wir suchen eine bijektive Abbildung von A auf eine Teilmenge von B. Definiere dazu eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf B durch

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \psi(x) = \psi(y).$$

Nach dem Auswahlaxiom (Axiom 7, äquivalente Formulierung b) existiert ein vollständiges Repräsentantensystem S, das aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält. Die Restriktion $\psi|_S : S \to A$ ist bijektiv und $(\psi|_S)^{-1} : A \to S$ ist die gesuchte Bijektion. □

Folgerung 1.72. *Sind X, Y Mengen und ist $T\colon X \to Y$, dann gilt $T(X) \preceq X$.*

Beweis. Man braucht nur zu beachten, dass T eine surjektive Abbildung von X auf $T(X)$ ist. □

Die Beziehung[2] $\preceq$ erinnert an eine Halbordnung. Insbesondere ist sie reflexiv und transitiv. Sie ist aber sicherlich nicht antisymmetrisch, denn aus $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$ folgt sicher nicht $X = Y$, wie man an Lemma 1.70(iv) sieht. Es gilt aber eine „abgeschwächte“ Form der Antisymmetrie, die in dem folgenden Satz enthalten ist. Genau

Satz 1.73 (E. Schröder[3]-F. Bernstein, 1897)**.** *Sind X und Y Mengen, dann gilt*

$$X \preceq Y \wedge Y \preceq X \iff X \sim Y.$$

---

[2]Wir sprechen hier nicht von einer Relation, da es keine geeigneten Mengen X, Y mit $\preceq \subset X \times Y$ gibt.

[3]Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder, geb. 25.11.1841 in Mannheim, gest. 16.6.1902 in Karlsruhe

Felix Bernstein
geb. 24.2.1878 in Halle
gest. 3.12.1956 in Zürich

Die Aussage „$\Longleftarrow$“ von Satz 1.73 ist die von Lemma 1.70(iv) und folgt unmittelbar aus der Definition von $\preceq$ und $\sim$. Die Umkehrung scheint zunächst auch unmittelbar einsichtig zu sein. Man darf sich dabei aber nicht von der Anschauung leiten lassen, sondern muss aus einer bijektiven Abbildung von X auf eine Teilmenge von Y und einer bijektiven Abbildung von Y auf eine Teilmenge von X eine bijektive Abbildung von X auf Y konstruieren. Wir werden diesen Satz später mit Hilfe des Rekursionstheorems (Satz 2.7) beweisen.

Wenn wir jetzt etwas ungenau von $\preceq$ als „Ordnung“ sprechen, dann ist diese Ordnung sogar total, denn es gilt

Satz 1.74. *Für zwei Mengen X, Y gilt stets $X \preceq Y$ oder $Y \preceq X$.*

Die Aussage dieses Satzes ist ebenfalls äquivalent zum Auswahlaxiom. Der Beweis erfordert allerdings die Theorie der Ordinalzahlen (Ordnungszahlen) und wird deshalb hier nicht ausgeführt. Siehe dazu z. B. [6, Kapitel 11]. Wir werden diesen Satz im Folgenden auch nicht verwenden.

Zum Abschluss dieses Kapitels zitieren wir noch einen Satz, der zeigt, dass es nicht so etwas wie eine größte Mächtigkeit gibt.

Satz 1.75 (G. Cantor)**.** *Für die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer Menge X gilt*

$$X \prec \mathfrak{P}(X).$$

Insbesondere existiert zu jeder Menge X eine Menge, die echt mächtiger als X ist, d. h., es gibt keine größte Mächtigkeit.

Beweis. Zunächst ist $\varphi\colon X \to \mathfrak{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$ eine injektive Abbildung von X in $\mathfrak{P}(X)$. Also gilt $X \preceq \mathfrak{P}(X)$. Wäre nun $X \sim \mathfrak{P}(X)$, so gäbe es eine Bijektion $\psi\colon X \to \mathfrak{P}(X)$ und die Menge $Y := \{x \in X; x \notin \psi(x)\}$ wäre ein Element von $\mathfrak{P}(X)$. Also gäbe es ein $x_0 \in X$ mit $\psi(x_0) = Y$. Damit wäre nach Definition von Y für alle $x \in X$

$$x \in \psi(x_0) \iff x \in Y \iff x \notin \psi(x)$$

und speziell für $x = x_0$ folgte

$$x_0 \in \psi(x_0) \iff x_0 \notin \psi(x_0).$$

Wegen dieses Widerspruchs kann es keine solche Bijektion ψ geben. $\square$