LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 25.05.2004

# 6. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 08.06.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

**Aufgabe 1:** Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $I \neq \emptyset$ und $(f_i : X \to Y)_{i \in I}$ die Familie aller stetigen Abbildungen von $X$ in $Y$ sowie $\mathcal{T}$ die Initialtopologie von $(f_i : X \to Y)_{i \in I}$.

a) Zeigen Sie: $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X$. [1]

b) Gilt stets $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$? (Beweis oder Gegenbeispiel!) [2]

c) Für $\underline{X} = \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{nat}$. [1]

d) Für $\underline{X} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat}), \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ gilt ebenfalls $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{nat}$. [3]

**Aufgabe 2:** Ist die nicht-euklidische Ebene $H$ aus Aufgabe 3, Übung 2 ein topologischer Unterraum von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{nat})$ für ein $n \in \mathbb{N}$? [2]

**Aufgabe 3:** Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Einbettung** von $\underline{X}$ in $\underline{Y}$, wenn $f$ ein Homöomorphismus von $\underline{X}$ auf den topologischen Unterraum $\underline{f(X)}$ von $\underline{Y}$ ist. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann eine Einbettung ist, wenn gilt:

(i) $f$ ist injektiv,

(ii) $f$ ist stetig und

(iii) für jedes offene $U \subset X$ ist $f(U)$ offen in $\underline{f(X)}$. [3]

**Aufgabe 4:** Seien $(Y, \mathcal{T}_{rel})$ ein topologischer Unterraum des nichtleeren topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ und $A \subset Y$. Zeigen Sie:

a) $\overset{\circ}{A} \subset B$, wobei $B$ der offene Kern von $A$ in der Relativtopologie auf $Y$ ist. [1]

b) $C \subset Y \cap \partial A$, wobei $C$ der Rand von $A$ in der Relativtopologie auf $Y$ ist. [2]

c) Zeigen Sie an Beispielen, dass weder in a) noch in b) Gleichheit gelten muss. [2]

**Aufgabe 5*:** Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \|x\| \leq 1\}$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Innern. $X$ und $B_n$ seien jeweils mit der natürlichen Topologie versehen. Zeigen Sie, dass $X$ und $B_n$ homöomorph sind.

**Hinweis:** Definieren Sie zunächst eine Abbildung $l : X \setminus \{x_0\} \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ für ein $x_0 \in \overset{\circ}{X}$, wobei $l(y)$ anschaulich die Länge der längstmöglichen Strecke von $x_0$ durch $y$ in $X$ bedeute. [8]

**Aufgabe 6:**

a) $\Lambda$ heißt **Gitter** im $\mathbb{R}^n$, wenn es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 + \ldots + \mathbb{Z}b_n$. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie und zwei Gitter $\Lambda, \Lambda'$ im $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass die Quotientenräume $\mathbb{R}^n/\Lambda$ und $\mathbb{R}^n/\Lambda'$ homöomorph sind. 2

b) [Der Fall $n = 2$]. Zeigen Sie, dass der Quotientenraum $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ homöomorph zum 2–dimensionalen Torus

$$T^2 = \{(z, \omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \,;\, |z| = |\omega| = 1\} = S^1 \times S^1$$

mit der Relativtopologie von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ist, wobei $\mathbb{C}$ mit der natürlichen Topologie versehen sei. 2

**Aufgabe 7:** Sei $I \subset \mathbb{R}, |I| = \infty$ und $\mathbb{R}^I := \{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ Abbildung}\}$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie:

a) $U \subset \mathbb{R}^I$ ist genau dann Umgebung von $f \in \mathbb{R}^I$, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$, reelle Zahlen $a_i \in I$, $1 \leq i \leq n$ und $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\prod_{x \in I} U_x \subset U$, wobei $U_x = \mathbb{R}$ für $x \in I \setminus \{a_i \,;\, 1 \leq i \leq n\}$ und $U_{a_i} := ]f(a_i) - \varepsilon, f(a_i) + \varepsilon[$ für $1 \leq i \leq n$. 6

b) Die Menge der polynomialen Abbildungen liegt dicht in $\mathbb{R}^I$. 2