LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 18.05.2004

5. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 25.05.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit $X \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{T}^*$ die Topologie auf $\mathbb{R}^*$ aus Übung 2, Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn $f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist und die beiden Limiten $\lim\limits_{x \to +\infty} f|_{\mathbb{R}}(x)$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f|_{\mathbb{R}}(x)$ existieren und mit $f(+\infty)$ bzw. $f(-\infty)$ übereinstimmen.

b) Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^*$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Mengen $\{x \in X; f(x) > c\}$ und $\{x \in X; f(x) < c\}$ offen sind.

c) Sind $f_j : X \to \mathbb{R}^*$, $j = 1, \ldots, n$, stetig, so sind auch die durch

$$M(x) := \max_{1 \leq j \leq n} f_j(x), \qquad m(x) := \min_{1 \leq j \leq n} f_j(x)$$

definierten Abbildungen $M : X \to \mathbb{R}^*$ und $m : X \to \mathbb{R}^*$ stetig.

d) Für $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, definiere man $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ durch $g_n(x) := x^{-n}$ für $x \neq 0$ und $g_n(0) := +\infty$. Welche der Abbildungen g_n sind stetig? $\boxed{6}$

Aufgabe 2: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Zeigen Sie, dass Automorphismengruppen homöomorpher topologischer Räume isomorph sind. $\boxed{2}$

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass aus der Isomorphie der Automorphismengruppen noch nicht die Homöomorphie der topologischen Räume folgt. $\boxed{1}$

Aufgabe 3: Sei $\mathcal{T}_{nat}$ die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \mathcal{T}_{nat} \cup \mathcal{U}(\infty)$ mit

$$\mathcal{U}(\infty) := \{\{\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| > n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Basis einer Topologie $\mathcal{T}_\infty$ auf $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \,\dot{\cup}\, \{\infty\}$ ist.

b) Welche der Räume $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, $(\mathbb{R}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$, $([0,1], \mathcal{T}_{nat})$ und $(S^1, \mathcal{T}_{nat})$ (mit der Einheitssphäre $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$) sind homöomorph? $\boxed{4}$

Aufgabe 4*: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig bezüglich der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: f ist genau dann offen, wenn f injektiv ist. $\boxed{3}$

b) Unter welchen Voraussetzungen ist f auch abgeschlossen, wenn f offen ist? $\boxed{1}$

Aufgabe 5:

a) Sei $X := \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die bezüglich der Menge aller monoton wachsenden Funktionen $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ initiale Topologie auf X. $\boxed{3}$

b) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wie läßt sich die Zariskitopologie auf $\mathbb{K}^n$ als Initialtopologie darstellen? $\boxed{3}$

Aufgabe 6: Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$ topologische Räume sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ surjektive, stetige Abbildungen. $\mathcal{T}_Y$ sei die finale Topologie von $(f : X \to Y)$. Beweisen Sie:

$\mathcal{T}_Z$ ist finale Topologie von $(g : Y \to Z) \Leftrightarrow \mathcal{T}_Z$ ist finale Topologie von $(g \circ f : X \to Z)$. $\boxed{4}$