LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 04.05.2004

3. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 11.05.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle Häufungs- und Randpunkte der Menge $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, wenn $\mathbb{R}$ mit der natürlichen, diskreten, indiskreten bzw. coabzählbaren Topologie versehen ist. $\boxed{7}$

Aufgabe 2: Sei X eine Menge und $^{-} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(2) für alle $A \subset X$ gilt $A \subset \overline{A}$;

(3) für alle $A \subset X$ gilt $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$;

(4) für alle $A, B \subset X$ gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Zeigen Sie, dass auf X eine eindeutig bestimmte Topologie existiert, so dass $\overline{A}$ für alle $A \subset X$ die abgeschlossene Hülle von A in dieser Topologie ist. $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Gibt es eine Metrik d auf $\mathbb{R}^n$, so dass zum einen $A \in \mathcal{T}_d$, falls $0 \notin A$, und zum andern jede ε–Kugel um 0 bezüglich d auch eine ε'–Kugel um 0 bezüglich der Euklidischen Metrik (Metrik d aus Beispiel (3.5) d)) ist? Gilt in $\mathcal{T}_d$ gegebenenfalls das zweite Abzählbarkeitsaxiom? $\boxed{4}$

Aufgabe 4*: a) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Paar $(\mathbb{R}^n, d)$ mit

$$d(x,y) := |x_1 - y_1| \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, d)$ ein pseudometrischer Raum ist. Wann ist d eine Metrik? $\boxed{1}$

b) Sei $C[0,1]$ der Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$ und

(i) $\|f\|_1 := \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| \qquad (f \in C[0,1])$,

(ii) $\|f\|_2 := \int\limits_0^1 |f(x)| dx \qquad (f \in C[0,1])$.

Zeigen Sie, dass hierdurch zwei Normen auf $C[0,1]$ definiert sind und geben Sie die induzierten Metriken auf $C[0,1]$ an. $\boxed{4}$

c) Für $i \in \{1,2\}$ bezeichne d_i die von der Norm $\|\circ\|_i$, aus Teil b) induzierte Metrik auf $C[0,1]$. Zeigen Sie:

$$f \in K_r^{d_1}(0) \quad \Longrightarrow \quad f \in K_r^{d_2}(0) \qquad (f \in C[0,1]).$$ 1

d) Sei $f_n \in C[0,1], n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x\,, & 0 \le x < \frac{1}{2n} \\ -2n^2(x - \frac{1}{n})\,, & \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n} \\ 0\,, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Skizzieren Sie f_n und zeigen Sie:

(i) $f_n \in K_1^{d_2}(0), f_n \notin K_1^{d_1}(0) \qquad (n \in \mathbb{N})$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(f_n, 0) = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = +\infty$,

(iii) $\|\circ\|_1$ und $\|\circ\|_2$ sind nicht äquivalent. 2

Hinweis: Benutzen Sie bekannte Ergebnisse der Analysis.

Aufgabe 5: Sei H die nicht-euklidische Ebene aus Aufgabe 3, Übung 2. Beweisen oder widerlegen Sie für $p : H \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$:

a) p ist stetig.

b) p ist offen.

c) p ist abgeschlossen.

4