LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 06.07.2004

11. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 13.07.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{T}$ eine Partitionstopologie. Unter welchen Voraussetzungen ist $\underline{X}$ regulär? $\boxed{5}$

Aufgabe 2: Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:
X ist genau dann normal, wenn es zu jeder endlichen Überdeckung $U_1, \ldots, U_n$ von X mit offenen Mengen stetige Abbildungen $f_i : X \to [0,1]$ gibt:

(i) $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1 \quad$ für alle $\quad x \in X$,

(ii) $f_i(x) = 0 \quad \forall\, x \in \complement_X U_i$, $1 \leq i \leq n$. $\boxed{6}$

Aufgabe 3*: Sei $\underline{X}$ ein normaler topologischer Raum. Seien $A_1, ..., A_n, n \geq 1$, abgeschlossene Teilmengen von X mit der Eigenschaft

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset.$$

Zeigen Sie, dass es offene Teilmengen $U_1, ..., U_n$ von X gibt, so dass

$$A_i \subset U_i \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{und} \quad \bigcap_{i=1}^n U_i = \emptyset.$$

$\boxed{4}$

Aufgabe 4: Seien $\underline{X}$ ein topologischer Raum und $\underline{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$. $\underline{X}$ habe die Eigenschaft:

(i) Zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$.

(ii) Zu jedem $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ mit $x \neq A$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ und $f|_A = 1$.

(iii) Für je zwei abgeschlossene Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

Welche topologische Trennungseigenschaft folgt aus der jeweiligen Eigenschaft für $\underline{X}$? $\boxed{5}$

Aufgabe 5: (X,d) sei ein pseudometrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt **Cauchy–Folge**, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, m,n \geq n_0 \quad d(x_m,x_n) < \varepsilon \ .$$

Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge eine Cauchy–Folge ist. $\boxed{2}$

Aufgabe 6: Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A := \{B; B = \emptyset \text{ oder } A \subset B \subset X\}$ für eine nicht-leere Teilmenge A von X.

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(X,\mathcal{T})$ an und bestimmen Sie die Menge der Limiten. $\boxed{4}$

b) Ist $(X,\mathcal{T})$ folgenbestimmt? $\boxed{2}$