LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 21.04.2004

1. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 27.04.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Hinweise zur Vorlesung Topologie

Vorlesungen und Übungen zur Topologie finden in den folgenden Hörsälen statt:

Mo	11.45 – 13.15	Vorlesung	Hörsaal III,
Mi	11.45 – 13.15	Vorlesung	Hörsaal V,
Di	11.45 – 13.15	Übung	Hörsaal V.

Diskussionsstunden: nach Vereinbarung.

Der erste Übungstermin ist der 27.04. Wegen der Fachschaftsvollversammlungen am 04.05. findet die Übung am 06.05. um 11.45 Uhr im Hörsaal IV statt. Am 14.07. findet keine Vorlesung statt (DIES), sie wird am 15.07. um 11.45 Uhr im Hörsaal kl. Phys. nachgeholt.

Übungen: Jede Woche wird dienstags in der Übung ein Übungszettel ausgegeben. Maximal zwei Personen dürfen gemeinsam abgeben. Ihre Lösungen werfen Sie bitte in den dafür vorgesehenen Kasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls A (Hauptgebäude, Raum 153). Die Übungsblätter sind auch im Internet erhältlich unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/ss04/topologie

Die Homepage des Lehrstuhls A für Mathematik finden Sie unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de.

Scheine/Klausuren: Für den Erhalt eines Scheines muss eine der beiden Klausuren bestanden werden. Eine Voraussetzung für die Teilnahme an den Klausuren besteht nicht. Für den (benoteten) Schein wird die bessere der beiden Klausuren gewertet.
Der durch die Klausuren erreichbare Schein zählt für Lehramtskandidaten als Leistungsnachweis. Lehramtskandidaten, die einen qualifizierten Studiennachweis erwerben wollen, müssen 1/3 der Übungspunkte erreichen und eine der mit einem Stern gekennzeichneten Aufgaben der Übungsblätter vorrechnen.
Die 1. Klausur findet an folgendem Termin statt:

Freitag, 30. 07. 2004, 16.00–19.00 Uhr im AM.

Der Termin der 2. Klausur wird noch bekanntgegeben, er wird voraussichtlich in der ersten oder zweiten Vorlesungswoche des Wintersemesters liegen.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie alle Topologien auf einer zweielementigen Menge. $\boxed{2}$

b) Sei X eine Menge mit zwei verschiedenen, nichtleeren, echten Teilmengen A, B. Wann ist

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, X, A, B\}$$

eine Topologie auf X? $\boxed{2}$

c) Sei X eine dreielementige Menge. Bestimmen Sie alle Topologien auf X, die genau 4 offene Mengen besitzen. $\boxed{2}$

Aufgabe 2:

a) Sei X eine Menge und A eine Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{T}_A := \{B\,;\, B = \emptyset \quad \text{oder} \quad A \subset B \subset X\}$$

eine Topologie auf X ist. Wie hat man A zu wählen, um die diskrete bzw. die indiskrete Topologie auf X zu erhalten? $\boxed{3}$

b) Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume.

(i) Seien X und Y disjunkt. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{T}^* := \{A \cup B\,;\, A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{T}'\}$$

eine Topologie auf $X \cup Y$ ist. $\boxed{2}$

(ii) Ist $\mathcal{T}^*$ auch noch eine Topologie, wenn X und Y nicht disjunkt sind? $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Sei X eine nichtleere Menge und ρ eine Abbildung von $X \times X$ in $\mathbb{R}$. Setze für $f \in X$, $\varepsilon > 0$

$$S_\varepsilon(f) := \{g \in X;\ \rho(g, f) < \varepsilon\}\ .$$

$S_\varepsilon(f)$ heißt eine **ε–Kugel** um f oder **ε–Umgebung** von f bezüglich ρ.
Man zeige:

$$\mathcal{T}_\rho := \{G \subset X;\ \forall g \in G\ \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } S_\varepsilon(g) \subset G\}$$

ist eine Topologie auf X. $\boxed{4}$

Aufgabe 4: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ in n Variablen mit Werten in $\mathbb{K}$. Für $I \subset \mathcal{P}$ setzt man

$$V(I) := \{x \in \mathbb{K}^n\,;\, p(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad p \in I\}.$$

Sei $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{K}^n\,;\, \text{es gibt ein } I \subset \mathcal{P} \text{ mit } A = \complement_{\mathbb{K}^n} V(I)\}$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{K}^n$, die sogenannte **Zariski–Topologie**. $\boxed{4}$

b) Im Fall $n = 1$ stimmt $\mathcal{T}$ mit der cofiniten Topologie auf $\mathbb{K}$ überein. Im Fall $n > 1$ ist für unendliches $\mathbb{K}$ die cofinite Topologie auf $\mathbb{K}^n$ echt gröber als $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}_{cof} \subsetneqq \mathcal{T}$). Was gilt für endliches $\mathbb{K}$? $\boxed{3}$