Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 6. Juli 2004

6. Übung zur Funktionalanalysis II

Abgabe: Montag, 19. Juli 2004 vor der Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Seien (F,G) ein Dualsystem, $A \subset F$ und D die kreisförmige Hülle von A (siehe Lemma I.3). Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es gilt $A^0 = D^0$.

b) Es gilt $A = \{0\}$ genau dann, wenn $A^0 = G$.

c) Es gilt $A = F$ genau dann, wenn $A^0 = \{0\}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Beweisen Sie Lemma II.18 der Vorlesung:
Seien E und F lokalkonvexe Hausdorffräume mit topologischen Dualräumen E' und F' und sei f ein stetiger linearer Operator von E in F. Dann ist f auch stetig als Abbildung von $(E, \sigma(E,E'))$ in $(F, \sigma(F,F'))$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Beweisen Sie Lemma III.1 der Vorlesung:
Seien E ein lokalkonvexer Raum und $\mathcal{U}$ eine Nullumgebungsbasis aus absolut konvexen und absorbierenden Mengen. Weiter sei $\mathcal{Q}$ eine Familie von Halbnormen auf E, die die Topologie von E erzeugt. Dann sind für beliebige Teilmengen $B \subset E$ die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) B ist beschränkt.

(ii) B wird von jeder Nullumgebung absorbiert.

(iii) Zu jedem $U \in \mathcal{U}$ existiert ein $\rho > 0$, so dass $B \subset \rho U$.

(iv) Für jede Halbnorm $\rho \in \mathcal{Q}$ ist $\rho(B)$ eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)
Beweisen Sie Folgerung III.1 und Lemma III.4 der Vorlesung:
Sei (F,G) ein Dualsystem und $B \subset F$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) B ist $\sigma(F,G)$-beschränkt.

(ii) Für alle $y \in G$ ist $\langle B, y\rangle := \{\langle x,y\rangle;\ x \in B\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$.

(iii) $q(y) := \sup\{|\langle x,y\rangle|;\ x \in B\}$ ist eine Halbnorm auf G.

(iv) B^0 ist eine absorbierende Teilmenge von G.

Definition: Für einen topologischen Vektorraum E ist die *Dimension* $\dim E$ definiert als die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren. Für einen Vektorunterraum M ist die *Codimension* $\operatorname{codim} M$ definiert als die Dimension von E/M.

Aufgabe 5 (7 Punkte)
Zeigen Sie für einen Hausdorffraum E die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Jeder Unterraum endlicher Codimension ist dicht in E.

(ii) Es existiert keine abgeschlossene Hyperebene in E.

(iii) Kein endlich-dimensionaler Unterraum M besitzt einen komplementären Unterraum, d. h. es existiert kein $M \subset E$ mit $\dim M < \infty$, so dass ein Unterraum $N \subset E$ mit $E = M \oplus N$ existiert.

Definition: Ein lokalkonvexer Raum heißt *bornologisch*, falls jede absolut konvexe Menge, die alle beschränkten Mengen absorbiert, eine Nullumgebung ist.

Aufgabe 6 (9 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass Lemma III.3 nicht umkehrbar ist, d. h. dass lokalkonvexe Räume E, F und eine beschränkte lineare Abbildung f von E in F existieren, so dass f nicht stetig ist.

b) Seien E, F lokalkonvexe Räume und f eine beschränkte lineare Abbildung von E in F. Sei B eine Teilmenge von F, die alle beschränkten Teilmengen absorbiert. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(B)$ alle beschränkten Mengen in E absorbiert.

c) Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

  (i) E ist bornologisch.

  (ii) Für jeden lokalkonvexen Raum F gilt: Alle beschränkten linearen Abbildungen $f : E \to F$ sind stetig.

Hinweis zu a): Wählen Sie für F einen unendlich dimensionalen Banachraum $(E, \|\cdot\|_E)$ und für E den Raum $(E, \sigma(E,E'))$, wobei E' der topologische Dualraum von $(E, \|\cdot\|_E)$ ist. Der Beweis, dass $f = \mathrm{id}$ nicht stetig ist, kann dann z. B. für

$$E = L^2_{2\pi} \text{ mit } \|x\|_{L^2_{2\pi}} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2}$$

geführt werden.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die kreisförmige Hülle und der Abschluss einer präkompakten Menge $A \subset E$ eines topologischen Vektorraumes E präkompakt sind.
Hinweis: Es darf benutzt werden, dass $E_1 \times E_2$ ein topologischer Vektorraum ist, falls E_1 und E_2 topologische Vektorräume sind.

b) Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Zeigen Sie: Ist $A \subset E$ präkompakt, dann ist $\mathrm{conv}(A)$ i. A. nicht präkompakt und nicht beschränkt.
Hinweis: Betrachten Sie $A := \{n^{-1/2}(\delta_{kn})_{k\geq 1};\, n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^{1/2}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma III.25 der Vorlesung:
Sei E lokalkonvex und $A \subset E$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) A ist präkompakt.

(ii) Jeder Filter $\mathcal{F}$ mit $A \in \mathcal{F}$ besitzt eine Verfeinerung, die Cauchy-Filter ist.

(iii) Jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ mit $A \in \mathcal{F}$ ist Cauchy-Filter.

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Zeigen Sie am Beispiel des Dualsystems (c_0, ℓ^1), dass Vollständigkeit nicht invariant unter kompatiblen Topologien ist. (Die Kompatibilität der Normtopologie von c_0 muss nicht bewiesen werden.)

Definition:

a) Sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$. A heißt eine *Tonne in* E, falls A absolut konvex, absorbierend und abgeschlossen ist.

b) Ein lokalkonvexer Raum E heißt *tonneliert*, wenn jede Tonne eine Nullumgebung ist.

Definition: Ein lokalkonvexer Raum $(E, \mathcal{T})$ heißt *absolut stark*, falls $\mathcal{T} = \beta(E, E')$, wobei E' der topologische Dualraum von E ist.

Aufgabe 10 (3 Punkte)

a) Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie: E ist genau dann tonneliert, wenn E absolut stark ist.

b) Sei E ein tonnelierter Hausdorffraum mit topologischem Dualraum E'. Zeigen Sie: Die abgeschlossene konvexe Hülle jeder $\sigma(E', E)$-kompakten Teilmenge von E' ist $\sigma(E', E)$-kompakt, ebenso die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle.

Hinweis: Verwenden Sie Folgerung III.9