LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 7. Juni 2004

4. Übung zur Funktionalanalysis II

Abgabe: Montag, 21. Juni 2004 vor der Übung

Im Folgenden sei $\mathcal{D}(K)$ für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ definiert wie in Beispiel 2 zu Satz 4 am Ende von Kapitel I der Vorlesung. Zusätzlich sei $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := \bigcup \mathcal{D}(K)$, wobei die Vereinigung über alle kompakten Teilmengen K des $\mathbb{R}^n$ zu bilden ist.

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $\mathcal{B}$ die Familie aller Teilmengen $V \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Jedes $V \in \mathcal{B}$ ist absolut konvex und absorbierend.

(ii) Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $V \in \mathcal{B}$ ist $V \cap \mathcal{D}(K)$ eine Umgebung in $\mathcal{D}(K)$.

Zeigen Sie: Es gibt genau eine Vektorraumtopologie $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, für welche $\mathcal{B}$ eine Nullumgebungsbasis bildet, und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ versehen mit dieser Topologie ist ein lokalkonvexer Raum.
Hinweis: Übung 2, Aufgabe 7.

Aufgabe 2 (0 Punkte)
ersatzlos gestrichen

Definition: Ein System $\mathcal{H}$ von Halbnormen auf einem Vektorraum E heißt *filtrierend*, wenn für je zwei Halbnormen $p_1, p_2 \in \mathcal{H}$ positive Zahlen a_1, a_2 und eine Halbnorm $p \in \mathcal{H}$ existieren, so dass $a_i p_i(x) \leq p(x)$ für $i = 1,2$ und alle $x \in E$.

Aufgabe 3 $(1+2+4+2$ Punkte$)$
Zeigen Sie:

a) Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $m \in \mathbb{N}_0$ wird durch

$$p_{K,m}(\varphi) := \max_{|\kappa| \leq m} \max_{x \in K} |D^\kappa \varphi(x)| \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

eine Halbnorm auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert.

b) Die Familie $\mathcal{H} := \{p_{K,m};\ K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt}, m \in \mathbb{N}_0\}$ ist filtrierend und total.

c) Sei $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ die von der Familie $\mathcal{H}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass der lokalkonvexe Raum $(C^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{T}_\mathcal{H})$ metrisierbar ist, und geben Sie eine Metrik ρ an, die $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ erzeugt. Der Raum $(C^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{T}_\mathcal{H})$ wird im Folgenden kurz mit $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

d) Eine Folge $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 1}$ aus $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann gegen $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, wenn für jeden Multiindex $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$ die Folge $(D^\kappa \varphi_\nu)_{\nu \geq 1}$ auf jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen $D^\kappa \varphi$ konvergiert.

Aufgabe 4 (4 + 2 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 1}$ eine Folge aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt aus $\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ stets $\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = \varphi$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und für $\nu \in \mathbb{N}$ sei

$$\varphi_\nu(x) := \frac{1}{\nu} \varphi\left(\frac{x}{\nu}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu = 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, aber nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere ist die Topologie von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nicht gleich der von $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ erzeugten Relativtopologie.

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Lebesgue-messbare Funktion. f heißt *lokal integrierbar*, falls f über jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Mit $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ wird im Folgenden der lineare Raum der auf $\mathbb{R}^n$ lokal integrierbaren Funktionen bezeichnet.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar und $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definiert durch $T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: $T_f \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))'$.
Bemerkung: Die stetigen lineare Funktionale auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, also die Elemente aus $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))'$ werden *Distributionen* genannt. Eine Distribution T heißt *regulär*, falls ein $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $T = T_f$ existiert. Anderenfalls heißt T *singulär*.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\delta(\varphi) := \varphi(x_0)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass δ eine singuläre Distribution ist (das sogenannte DIRACsche Delta-Funktional).

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ sei definiert wie in der Vorlesung, Kap. I, Beisp. 5 (Ende Kapitel I), mit dem klassischen Konvergenzbegriff „in $\mathcal{D}(\Omega)$“, d. h. eine Folge $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 1}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert genau dann gegen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, wenn ein Kompaktum $K \subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ und $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset K$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $D^\kappa \varphi_\nu$ für alle $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$ auf K gleichmäßig gegen $D^\kappa \varphi$ konvergiert.

a) Konstruieren Sie eine Folge von Halbnormen $(p_k)_{k \geq 1}$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$ mit der Eigenschaft:
Eine Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert genau dann gegen ein $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, wenn es zu jedem Paar $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon, m)$ gibt, so dass $f_n - f \in \mathcal{U}_{\varepsilon,m}$ für alle $n \geq n_0$, wobei

$$\mathcal{U}_{\varepsilon,m} := \{f \in \mathcal{D}(\Omega);\ p_k(f) \leq \varepsilon \text{ für alle } 1 \leq k \leq m\}.$$

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ unter der von den p_k erzeugten Topologie ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum ist und dass die $\mathcal{U}_{\varepsilon,m}$ dort eine Nullumgebungsbasis bilden. (Insbesondere ist zu zeigen: Die p_k sind Halbnormen und die Folge $(p_k)_{k \geq 1}$ ist total.)

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass auf $L^p(0,1)$ für $0 < p < 1$ kein nicht-triviales stetiges lineares Funktional existiert.
Hinweis: H. H. SCHAEFER, Topological Vector Spaces, 1971, S. 34.

Aufgabe 9 (7 Punkte)
Zeigen Sie, dass in einem topologischen Vektorraum E genau dann nicht-triviale stetige lineare Funktionale existieren, wenn es eine konvexe Nullumgebung $U \neq E$ gibt.
Hinweis: Zeigen Sie für die Rückrichtung, dass Lemma I.14 i) auch unter der Voraussetzung „E ein topologischer Vektorraum" gültig bleibt, und beweisen Sie folgende Version des Satzes von Hahn-Banach:
Sei E ein topologischer Vektorraum, $a \in E$ und p eine stetige Halbnorm auf E. Dann existiert ein lineares stetiges Funktional $f \in E'$ mit

$$f(a) = p(a) \quad \text{und} \quad |f(x)| \leq p(x) \text{ für alle } x \in E.$$