LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 7. Mai 2004

2. Übung zur Funktionalanalysis II

Abgabe: Freitag, 21. Mai 2004, 10.00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Geben Sie ein Beispiel an für einen topologischen Vektorraum E und eine Menge $A \subset E$, die kreisförmig aber nicht Nullumgebung ist.

Definition: Sei E ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt *ausgeglichen*, falls zu jedem $x \in E$ ein $\lambda > 0$ existiert, so dass $x \in \lambda A$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist A absorbierend, dann ist A ausgeglichen.

b) Ist A ausgeglichen, dann ist A absorbierend.

Aufgabe 3 ($5+1+2$ Punkte)
Seien E ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $A \subset E$. Zeigen Sie:

a) Ist A konvex, kreisförmig, absolut konvex oder absorbierend, so besitzt die Abschließung $\overline{A}$ von A jeweils dieselbe Eigenschaft.

b) Ist A konvex, so auch ihr Inneres $\operatorname{int} A$.

c) Falls zusätzlich $0 \in \operatorname{int} A$ gilt, so impliziert die Kreisförmigkeit oder die absolute Konvexität von A dieselbe Eigenschaft für $\operatorname{int} A$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$ absorbierend. Beweisen oder widerlegen Sie in diesem Fall die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $0 \in \operatorname{int} A$.

b) $\operatorname{int} A$ ist absorbierend.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $C(\mathbb{R}, \mathbb{K}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K};\ f \text{ stetig}\}$ und $p_n(f) := \max_{t \in [-n,n]} |f(t)|$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Der Raum $C(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ bildet unter der durch die Halbnormen $p_n(f)$ induzierten Topologie einen lokalkonvexen, metrisierbaren Hausdorffraum, welcher aber nicht normierbar ist.

Definition: Sei $E \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.

a) Eine Mengenfamilie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E) := \{A;\, A \subset E\}$ heißt ein *Filter* auf E, falls gilt:
   F_1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
   F_2) Für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{F}$,
   F_3) Für alle $A \in \mathcal{F}$ und alle $B \subset E$ mit $A \subset B$ gilt $B \in \mathcal{F}$.

b) Eine Mengenfamilie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ heißt eine *Filterbasis* auf E, falls gilt:
   FB_1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{B}$,
   FB_2) Für alle $A, B \in \mathcal{B}$ existiert ein $C \subset A \cap B$, so dass $C \in \mathcal{B}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Sei E ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $\mathcal{N}$ eine Filterbasis auf E mit den Eigenschaften
NU_1) Jedes $U \in \mathcal{N}$ ist absorbierend.
NU_2) Jedes $U \in \mathcal{N}$ ist kreisförmig.
NU_3) Zu jedem $U \in \mathcal{N}$ existiert ein $V \in \mathcal{N}$ mit $V + V \subset U$.
Zeigen Sie:

a) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $U \in \mathcal{N}$ existiert ein $V \in \mathcal{N}$, so dass $\sum_{i=1}^{n} V := V + \sum_{i=1}^{n-1} V \subset U$.

b) Zu jedem $\alpha \in \mathbb{K}$ und jedem $U \in \mathcal{N}$ existiert ein $V \in \mathcal{N}$, so dass $\alpha V \subset U$.

Aufgabe 7 (6* Punkte)
Sei E ein Vektorraum und $\mathcal{N}$ eine Filterbasis mit den Eigenschaften NU_1) – NU_3). Zeigen Sie: Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf E, so dass $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $\mathcal{N}$ eine Nullumgebungsbasis ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, dass der topologische Vektorraum

$$\ell^p := \left\{ x = (x_k)_{k \geq 1};\ x_k \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

für $0 < p < 1$ unter der Metrik $d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p$ nicht lokalkonvex ist.

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Sei E ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Weiter seien $A, B \subset E$ absolut konvexe und absorbierende Teilmengen von E und $p_A(x) := \inf\{\lambda;\ \lambda > 0,\ x \in \lambda A\}$ das Minkowski-Funktional von A. Zeigen Sie:

a) Ist $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so gilt $p_{\alpha A}(x) = \frac{1}{|\alpha|} p_A(x)$ für alle $x \in E$.

b) $p_{A \cap B}(x) = \max\{p_A(x), p_B(x)\}$ für alle $x \in E$.

c) Ist $A \subset B$, so gilt $p_B(x) \leq p_A(x)$ für alle $x \in E$.

d) Sei $B \subset E$ derart, dass

$$\{x \in E;\ p_A(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in E;\ p_A(x) \leq 1\}.$$

   Dann gilt $p_B(x) = p_A(x)$ für alle $x \in E$.