LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 23. April 2004

1. Übung zur Funktionalanalysis II

Abgabe: Freitag, 7. Mai 2004, 10.00 Uhr

Hinweise zum Übungsbetrieb Die Übungen sollen möglichst zu dritt bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie jeweils bis zum auf dem Übungsblatt angegebenen Termin ab, entweder beim Übungsleiter oder in den Übungskasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls (Raum 155 im Hauptgebäude).

Zum Erwerb eines Übungsscheins bzw. eines qualifizierten Studiennachweises müssen 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. Wer mindestens einmal die Lösung einer Aufgabe vorrechnet, muss nur 40% der Gesamtpunktzahl erreichen.

Die Übungsblätter und weiteres Material zur Vorlesung sind auch im Internet erhältlich unter
`http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/ss04/funktionalanalysis2/`

Aufgabe 1 $(1+1$ Punkte)
Sei E ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $A \subset E$. Zeigen Sie:

a) Im Allgemeinen ist $2A \neq A+A$.

b) Für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt $(\lambda+\mu)A \subset \lambda A + \mu A$.

Aufgabe 2 $(1+3$ Punkte)
Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subset E$. Beweisen Sie:

a) A ist genau dann konvex, wenn $\lambda x + \mu y \in A$ für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda, \mu \geq 0$ und $\lambda + \mu = 1$.

b) (Lemma I.1) A ist genau dann absolut konvex, wenn $\lambda x + \mu y \in A$ für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Beweisen Sie, dass beliebige Durchschnitte und Vereinigungen kreisförmiger Mengen wieder kreisförmig sind.

Aufgabe 4 $(4+1+1+1+4+1+2$ Punkte)
Beweisen Sie Lemma I.3 der Vorlesung:
Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subset E$, dann gilt:

a) Für die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(A)$ gilt

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ x_i \in A \text{ für } 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

b) $\operatorname{conv}(A)$ ist konvex.

c) Für die absolut konvexe Hülle $\Gamma(A)$ gilt

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1,\ x_i \in A \text{ für } 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

d) $\Gamma(A)$ ist absolut konvex.

e) Definiert man die *kreisförmige Hülle* von A als die Menge $\{\lambda x;\ x \in A,\ \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leq 1\}$, so gilt: $\Gamma(A)$ ist die konvexe Hülle der kreisförmigen Hülle von A, aber die kreisförmige Hülle der konvexen Hülle von A ist i. A. nicht konvex.

f) Ist A kreisförmig, so gilt: $\Gamma(A) = \mathrm{conv}(A)$.

g) Wenn $A, B \subset E$ absolut konvex sind, dann auch $A + B$ und λA für beliebige $\lambda \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 5 $(3+2$ Punkte)

a) Zeigen Sie, dass Obermengen, endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen absorbierender Mengen wieder absorbierend sind.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Beliebige Durchschnitte von absorbierenden Mengen sind absorbierend.

Aufgabe 6 $(1+1+1$ Punkte)
Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subset E$ nichtleer und kreisförmig. Zeigen Sie:

a) A enthält das Nullelement und ist symmetrisch, d. h. mit $x \in A$ gilt auch $-x \in A$.

b) Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq |\mu|$, so gilt $\lambda A \subset \mu A$.

c) Wenn zu jedem $x \in E$ ein $\lambda \neq 0$ mit $x \in \lambda A$ existiert, dann ist A absorbierend.

Aufgabe 7 (3 Punkte)
Beweisen Sie Lemma I.4 der Vorlesung:
Sei A eine absolut konvexe Teilmenge eines Vektorraumes E. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) A ist absorbierend.

(ii) A spannt E auf.

(iii) Es gilt $E = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$.

(iv) Es gilt $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA$.

Aufgabe 8 (3 + 4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Ist d eine Metrik auf E und d^* durch

$$d^*(x,y) := \min\{d(x,y),\ 1\} \qquad \text{für alle } x,y \in E$$

definiert, dann ist d^* eine zu d äquivalente Metrik auf E.

b) Wenn d_1 und d_2 Metriken auf E sind und Konstanten $m, M > 0$ existieren, so dass

$$md_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Md_1(x,y) \qquad \text{für alle } x,y \in E,$$

dann sind d_1 und d_2 äquivalent. Die Umkehrung gilt i. A. nicht.

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge E. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) d_1 und d_2 sind äquivalent.

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in E und jedes $x \in E$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d_2(x_n,x) = 0.$$