Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens
Dipl.-Math. A. Haß

Aachen, den 23.06.2003

8. Übung zu Zahlbereichserweiterungen

(Abgabe: Montag, 30.06.2003, vor der Übung)

Aufgabe 1: Zeigen Sie:

a) Für alle n, $N \in \mathbb{N}$ mit $n < (N+1)!$ existiert eine Darstellung

$$n = \sum_{k=1}^{N} a_k k! \,, \qquad a_k \in \{0, 1, \ldots, k\}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Kann man die a_k algorithmisch beschreiben? $\boxed{4}$

b) Jedes $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k! \,,$$

wobei $a_k \in \{0, 1, \ldots, k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $a_k = 0$ für fast alle k. $\boxed{3}$

c) Wie groß muss man N in a) mindestens wählen, um alle 100-stelligen natürlichen Zahlen darstellen zu können? $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Ist $a = \sum_{i=0}^{n} q_i g^i$ die g-adische Darstellung von $a \in \mathbb{N}$, so heißt

$$Q'_q(a) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i q_i$$

alternierende g-adische Quersumme von a. Zeigen Sie:

$$(g+1) | a \Leftrightarrow (g+1) | Q'_q(a).$$

$\boxed{3}$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die g-adische Darstellung der folgenden Zahlen:

a) 1993, $g = 12$, b) 553, $g = 5$, c) 422, $g = 8$. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass es zu jedem $a \in \mathbb{Q}$ genau ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n \leq a < n+1$. Man nennt n das *größte Ganze* von a und schreibt $[a] := n$. $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$ und

$$\mathbb{D} = \left\{ \varepsilon \sum_{k=-n}^{m} d_k g^k;\ \varepsilon = \pm 1,\ d_k \in \{0, \dots, g-1\},\ n,\ m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{D} = \{\frac{m}{g^n};\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0\}$. $\boxed{3}$

b) $\mathbb{D}$ ist ein echter Unterring von $\mathbb{Q}$, der $\mathbb{Z}$ umfaßt. $\boxed{3}$

Aufgabe 6: Sei $\succ$ eine Ordnung auf $\mathbb{Q}$, so dass $(\mathbb{Q}, \succ)$ ein angeordneter Körper ist, d.h. für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gelte:

a) Es tritt genau einer der drei Fälle $x \succ y$ oder $x = y$ oder $y \succ x$ ein.

b) Aus $x \succ y$ folgt $x + z \succ y + z$.

c) Aus $x \succ 0$ und $y \succ 0$ folgt $xy \succ 0$.

d) Aus $x \succ y$ und $y \succ z$ folgt $x \succ z$.

Zeigen Sie, dass $\succ$ dann schon die übliche Größer-Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist und folgern Sie, dass genau eine Ordnung auf $\mathbb{Q}$ existiert, die $\mathbb{Q}$ zu einem angeordneten Körper macht. $\boxed{4}$

$\boxed{\boxed{28}}$