LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. T. Heck, I. Klöcker

Aachen, den 31. Juli 2003

14. Übung zur Analysis IV

Abgabe: Montag, 11. August 2003, bis 12.00 Uhr im Kasten vor Raum 155, Hauptgebäude

Hinweis zu den Scheinklausuren Entgegen der Ankündigung auf dem 13. Übungsblatt sind die Übungen 1-3 (also die Vektoranalysis) nicht klausurrelevant.

Hinweis Die Musterlösung zu dieser Übung wird ab dem 12. August im Netz verfügbar sein. Vorgerechnet wird diese Übung voraussichtlich 1-2 Wochen vor der Vordiplomklausur.

Aufgabe 1 (je 3^* Punkte)
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $c > 1$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(bx)}{a^2+x^2}\, dx,$

c) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(c+\cos x)^2}.$

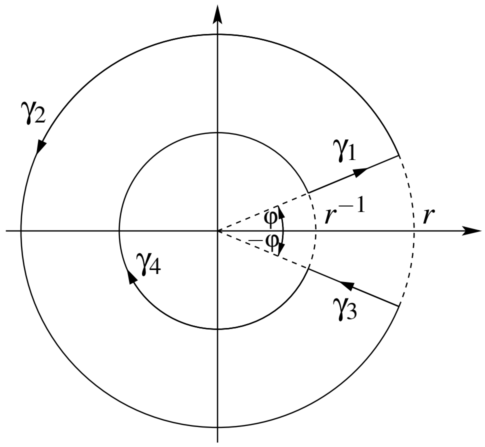
d) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos t+\sin t}{2+\sin t}\, dt.$

Aufgabe 2 ($6^* + 2^*$ Punkte)

a) Sei $R(x)$ eine auf $\mathbb{R}_+$ polstellenfreie rationale Funktion mit $R(0) \neq 0$ und existiere ein $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, so dass
$$\lim_{x\to\infty} x^{\lambda}|R(x)| = 0,$$
ist. Zeigen Sie: Ist
$$f(z) = (-z)^{\lambda-1}R(z), \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+,$$
wobei $(-z)^{\lambda-1} := \exp((\lambda-1)\operatorname{Log}(-z))$ sei, dann gilt
$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1}R(x)\, dx = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi} \sum_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{Res}_a(f).$$

b) Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $0 < \lambda < 1$ das Integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{x+a}\, dx.$

Hinweis zu a): Betrachten Sie einen Integrationsweg wie in der nebenstehenden Skizze und lassen Sie $r \to \infty$ gehen.



Aufgabe 3 (10* Punkte)
Sei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion und $\Psi(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ (wohldefiniert?). Zeigen Sie:

a)
$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{dt} \quad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

b)
$$\Psi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t + 1}\,\mathrm{dt} \quad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

c) Die Integraldarstellung aus b) stellt für $\mathrm{Re}(s) > 0$ eine holomorphe Funktion dar.

d) $\zeta(s)$ lässt sich in die Halbebene $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$ meromorph fortsetzen und hat höchstens Pole in $s = 1$ oder $s = 1 \pm \frac{2\pi i k}{\log 2}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

e) Führen Sie die Aufgabenteile b)-d) für $(1-3^{1-s})\zeta(s)$ durch.

f) $\zeta(s)$ hat genau einen Pol in $\{s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(s) > 0\}$ und zwar bei $s = 1$.

Hinweis: $\frac{\log 3}{\log 2}$ ist irrational.

Bemerkung: Die Reihendarstellung von $\Psi(s)$ konvergiert genau für $\mathrm{Re}(s) > 0$, was aber nicht ganz so einfach zu zeigen ist. Sie konvergiert genau für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut.
$\zeta(s)$ lässt sich mit Hilfe einer Funktionalgleichung auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen. Sie hat bei $s = 1$ ihren einzigen Pol, der einfach ist. Das Residuum ist 1. Die (noch unbewiesene) Riemannsche Vermutung besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen (also nicht die einfachen Nullstellen in $z \in -2\mathbb{N}$) auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Bekannt ist, dass alle sonstigen Nullstellen im Streifen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ liegen. Zusätzlich bewiesen ist, dass unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen.